Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана

Методические указания

А.Ф. ПЕЛЕВИНА, И.Г. ЗОРИНА

ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Издательство МГТУ имени Н.Э. Баумана

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. Н.Э. БАУМАНА

А.Ф. ПЕЛЕВИНА, И.Г. ЗОРИНА

ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Методические указания
к выполнению типового расчета

Под редакцией *А.Ф. Пелевиной*

Москва
Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана
2002

УДК 512.94
ББК 22.151.5
П24

Рецензент *М.М. Сержантова*

П24 Пелевина А.Ф., Зорина И.Г.
Векторная алгебра. Аналитическая геометрия: Методические указания к выполнению типового расчета. Под ред. А.Ф. Пелевиной. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. – 80 с., ил.

ISBN 5-7038-1964-4

Методические указания охватывают основные разделы векторной алгебры и аналитической геометрии. Каждая из рассмотренных тем содержит краткие теоретические сведения, необходимые для решения задач, примеры решения типовых задач, контрольные задания, задачи для самостоятельной работы. Приведены 30 вариантов типового расчета по векторной алгебре и аналитической геометрии, состоящих из 15 задач.

Для студентов первого курса всех специальностей, может быть полезно преподавателям при проведении семинарских занятий.

Ил. 21. Табл. 1. Библиогр. 4 назв.

УДК 512.94
ББК 22.151.5

Алла Федоровна Пелевина
Ирина Григорьевна Зорина

ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА.
АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Редактор *Е.К. Кошелева*
Корректор *Г.С. Беляева*

Изд. лиц. № 020523 от 25.04.97 г.
Подписано в печать 11.12.01. Формат 60x84/16. Бумага офсетная
Печ. л. 5,0. Усл. печ. л. 4,65. Уч.-изд. л. 4,29.
Тираж 100 экз. Изд. № 6. Заказ № 49
Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана,
типография МГТУ им. Н.Э. Баумана.
107005, Москва, 2-я Бауманская, 5.

ISBN 5-7038-1964-4

Глава 1. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

1.1. Геометрические векторы. Линейные операции над векторами

В природе встречаются скалярные и векторные величины.

Определение 1.1. Величина называется скалярной, если она характеризуется заданием ее числового значения.

Определение 1.2. Величина называется векторной, если она характеризуется не только числовым значением, но и направлением в пространстве.

При изучении векторных величин нужно знать алгебру векторов.

Определение 1.3. Геометрическим вектором называется направленный отрезок. Обозначим вектор $\boldsymbol{a}$ или $\overline{AB}$, если точка A – начало, а точка B – конец вектора (рис. 1).

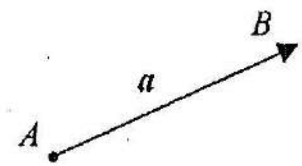

Рис. 1

Определение 1.4. Модулем вектора называется его длина (обозначение: $|\boldsymbol{a}|$ или $|\overline{AB}|$).

Определение 1.5. Нулевым вектором называется вектор, у которого начало и конец совпадают.

Модуль нулевого вектора равен нулю; направление неопределенное.

Определение 1.6. Единичным вектором, или ортом, называется вектор, длина которого равна единице.

Определение 1.7. Ортом вектора $\boldsymbol{a}$ называется единичный вектор $\boldsymbol{a}^0$ того же направления, что и вектор $\boldsymbol{a}$.

Определение 1.8. Векторы называются коллинеарными, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

Определение 1.9. Векторы называются компланарными, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

Определение 1.10. Векторы называются равными, если они коллинеарны, одинаково направлены (сонаправлены) и модули их равны.

Определение 1.11. Два коллинеарных вектора, имеющих одинаковые модули и противоположные направления (для вектора $\overline{AB}$ это вектор $\overline{BA}$), называются противоположными (если $\overline{AB} = \boldsymbol{a}$, то $\overline{BA} = -\boldsymbol{a}$).

Линейные операции над векторами

Определение 1.12. Линейными операциями над векторами называется сложение (вычитание) векторов и умножение вектора на скаляр.

Определение 1.13. (правило треугольника). Суммой векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называется вектор, соединяющий начало вектора $\boldsymbol{a}$ с концом вектора $\boldsymbol{b}$, если начало вектора $\boldsymbol{b}$ совмещено с концом вектора $\boldsymbol{a}$ (рис. 2).

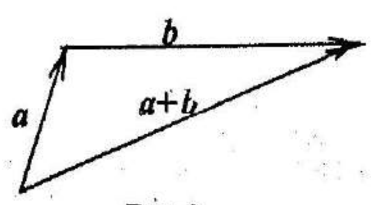

Рис. 2

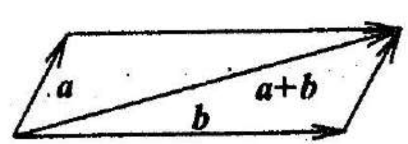

Рис. 3

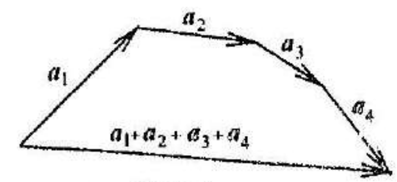

Рис. 4

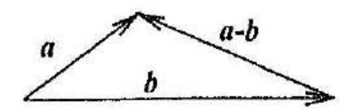

Рис. 5

Определение 1.14. (правило параллелограмма). Сумма векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, имеющих общее начало, равна диагонали параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, и выходящей из общего начала векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ (рис. 3).

Определение 1.15. Суммой n векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \ldots \boldsymbol{a}_n$ называется вектор, соединяющий начало вектора $\boldsymbol{a}_1$ с концом вектора $\boldsymbol{a}_n$, если начало вектора $\boldsymbol{a}_2$ совмещено с концом $\boldsymbol{a}_1$, начало $\boldsymbol{a}_3$ совмещено с концом $\boldsymbol{a}_2$ и т.д. (рис. 4).

Определение 1.16. Разностью векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, имеющих общее начало, называется вектор, соединяющий конец вычитаемого вектора с концом уменьшаемого (рис. 5).

Разность векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ можно найти, сложив с вектором $\boldsymbol{a}$ противоположный вектор $(-\boldsymbol{b})$: $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{b})$.

Справедливы законы сложения векторов:

1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$ (переместительный); 2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$ (сочетательный); 3) Для каждого $(\forall)\boldsymbol{a}$ выполняется равенство $\boldsymbol{a} + 0 = \boldsymbol{a}$;

4) Для $\forall \boldsymbol{a}$ существует $(\exists)$ противоположный вектор $(-\boldsymbol{a})$, такой, что $\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) = 0$.

Определение 1.17. Произведением вектора $\boldsymbol{a}$ на скаляр λ называется вектор $\lambda\boldsymbol{a}$, коллинеарный вектору $\boldsymbol{a}$, сонаправленный с ним, если $\lambda > 0$ и направленный противоположно ему, если $\lambda < 0$, имеющий длину $|\lambda\boldsymbol{a}| = |\lambda| \cdot |\boldsymbol{a}|$.

Справедливы законы умножения вектора на скаляр:

5) $\lambda(\mu\boldsymbol{a}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{a}$ (сочетательный);

6) $(\lambda + \mu)\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{a}$ (распределительный относительно суммы скаляров);

7) $\lambda(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \lambda\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}$ (распределительный относительно суммы векторов);

8) Для $\forall \boldsymbol{a}$ выполняется равенство $1\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$.

Из определения умножения вектора на скаляр следует:

1. Вектор, противоположный вектору $\boldsymbol{a}$, получается умножением вектора $\boldsymbol{a}$ на скаляр $\lambda = -1(-\boldsymbol{a} = (-1)\boldsymbol{a})$.

2. При умножении $\forall \boldsymbol{a}$ на скаляр 0 получается нулевой вектор: $0\boldsymbol{a} = 0$.

3. Если $\forall \boldsymbol{a} \neq 0$ умножить на скаляр $\lambda = \dfrac{1}{|\boldsymbol{a}|}$, то получится единичный вектор. Этот вектор называется ортом вектора $\boldsymbol{a}$ и обозначается $\boldsymbol{a}^0$:

$$\boldsymbol{a}^0 = \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}. \tag{1.1}$$

Законы линейных операций дают возможность проводить преобразования в векторной алгебре по тем же правилам, что и в алгебре действительных величин.

Решение типовых задач

Пример 1.1. В $\triangle ABC$, построенном на векторах $\overline{BA} = \boldsymbol{a}$ и $\overline{BC} = \boldsymbol{c}$, сторону AC разделили точками P и M на три равные части. Найти вектор $\overline{BP}$.

Решение. В $\triangle BAP$ (рис. 6) находим вектор $\overline{BP} = \overline{BA} + \overline{AP}$, но вектор $\overline{AP} = \dfrac{1}{3}\overline{AC}$. В $\triangle ABC$ находим вектор $\overline{AC} = \overline{BC} - \overline{BA} \Rightarrow \overline{AC} = \boldsymbol{c} - \boldsymbol{a}$ и $\overline{AP} = \dfrac{1}{3}(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{a})$. Тогда вектор $\overline{BP} = \boldsymbol{a} + \dfrac{1}{3}(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{a}) \Rightarrow \overline{BP} = \dfrac{1}{3}(2\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c})$.

Пример 1.2. В равнобедренной трапеции $ABCD$ боковая сторона $\overline{AB} = \boldsymbol{a}$, нижнее основание $\overline{AD} = \boldsymbol{c}$, $\angle BAD = 60°$. Найти стороны $\overline{BC}$ и $\overline{CD}$ и диагонали $\overline{AC}$ и $\overline{BD}$ трапеции.

Решение. В равнобедренной трапеции $ABCD$ (рис. 7) строим $BP \parallel CD$, тогда $\triangle ABP$ – равносторонний и вектор $\overline{AP} = |\boldsymbol{a}|\boldsymbol{c}^0 \Rightarrow \overline{AP} = \dfrac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{c}|}\boldsymbol{c}$.

Вектор $\overline{BC} = \overline{PD} \Rightarrow \overline{BC} = \overline{AD} - \overline{AP} \Rightarrow \overline{BC} = \boldsymbol{c} - \dfrac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{c}|}\boldsymbol{c} = \left(1 - \dfrac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{c}|}\right)\boldsymbol{c}$. Вектор $\overline{BD} = \overline{AD} - \overline{AB} = \boldsymbol{c} - \boldsymbol{a}$. Вектор $\overline{CD} =$

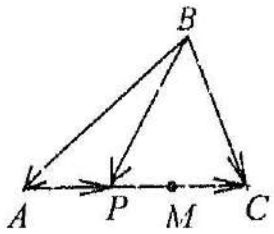

Рис. 6

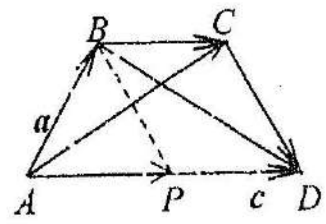

Рис. 7

$= \overline{BP} \Rightarrow \overline{CD} = \overline{AP} - \overline{AB} \Rightarrow \overline{CD} = \dfrac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{c}|}\boldsymbol{c} - \boldsymbol{a}$. Вектор $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} \Rightarrow \overline{AC} = \boldsymbol{a} + \left(1 - \dfrac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{c}|}\right)\boldsymbol{c}$.

Пример 1.3. $\triangle ABC$ построен на векторах $\overline{AB} = \boldsymbol{a}$, $\overline{AC} = \boldsymbol{c}$. Найти вектор $\overline{AM}$, коллинеарный биссектрисе $\angle BAC$, если точка M лежит на стороне BC.

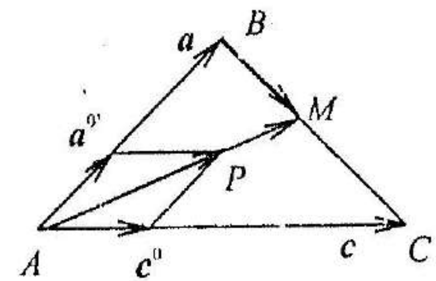

Рис. 8

Решение. В $\triangle ABM$ (рис. 8) вектор $\overline{AM} = \overline{AB} + \overline{BM}$, но вектор $\overline{BM} \parallel \overline{BC} = \boldsymbol{c} - \boldsymbol{a} \Rightarrow \overline{BM} = \lambda(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{a})$. Вектор $\overline{AM} = \boldsymbol{a} + \lambda(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{a}) \Rightarrow \overline{AM} = (1 - \lambda)\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{c}$. Вектор $\overline{AP}$ принадлежит биссектрисе $\angle BAC$, так как является диагональю ромба, построенного на ортах $\boldsymbol{a}^0 = \dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$ и $\boldsymbol{c}^0 = \dfrac{\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{c}|}$. Следовательно, вектор $\overline{AP} = \dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} + \dfrac{\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{c}|}$. Но вектор $\overline{AM} \parallel \overline{AP}$. Из условия коллинеарности этих векторов $(1-\lambda)|\boldsymbol{a}| = \lambda|\boldsymbol{c}|$ находим $\lambda = \dfrac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{c}|}$, тогда вектор $\overline{AM} = \boldsymbol{a} + \dfrac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{c}|}(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}) \Rightarrow \overline{AM} = \dfrac{|\boldsymbol{c}|\boldsymbol{a}+|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{c}|}$.

Пример 1.4. Параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ построен на векторах $\overline{AB} = \boldsymbol{a}$, $\overline{AD} = \boldsymbol{b}$, $\overline{AA_1} = \boldsymbol{c}$. Выразить через них векторы $\overline{BD_1}$ и $\overline{CP}$, где точка P делит ребро A_1B_1 в соотношении 2:1.

Решение. Вектор $\overline{BD_1}$ (рис. 9) находим как сумму векторов $\overline{BA}$, $\overline{AA_1}$ и $\overline{A_1D_1}$, тогда $\overline{BD_1} = \overline{BA} + \overline{AA_1} + \overline{A_1D_1} \Rightarrow \overline{BD_1} = -\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b}$.

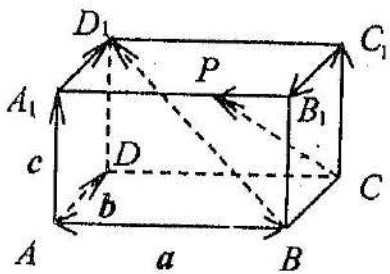

Рис. 9

Вектор $\overline{CP}$ находим как сумму векторов $\overline{CC_1}$, $\overline{C_1B_1}$ и $\overline{B_1P}$, тогда $\Rightarrow \overline{CP} = \boldsymbol{c} - \boldsymbol{b} - \dfrac{1}{3}\boldsymbol{a}$.

Контрольное задание 1

1.1. Найти сумму и разность коллинеарных векторов, заданных преподавателем.

1.2. Даны векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Построить векторы $3\boldsymbol{a} + \dfrac{1}{2}\boldsymbol{b}$; $\dfrac{1}{3}\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b}$.

1.3. В правильном шестиугольнике $ABCDEF$ векторы $\overline{AB} = \boldsymbol{p}$, $\overline{Bc} = \boldsymbol{q}$. Выразить через $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ векторы $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$, $\overline{CD}$, $\overline{FA}$, $\overline{AE}$.

1.4. ΔABC построен на векторах $\overline{AB} = \boldsymbol{a}$, $\overline{BC} = \boldsymbol{b}$. Выразить через $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ медианы треугольника.

1.5. ΔABC построен на векторах $\overline{AB} = \boldsymbol{b}$, $\overline{AC} = \boldsymbol{a}$. Найти вектор произвольной длины, коллинеарный биссектрисе $\angle ABC$.

1.6. Параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ построен на векторах $\overline{AB} = \boldsymbol{m}$, $\overline{AD} = \boldsymbol{n}$, $\overline{AA_1} = \boldsymbol{p}$. Выразить через них векторы $\overline{C_1A}$ и $\overline{DB_1}$.

1.7. В треугольной пирамиде $SABC$, где ΔABC – основание, S – вершина, даны векторы $\overline{SA} = \boldsymbol{a}$, $\overline{SB} = \boldsymbol{b}$, $\overline{SC} = \boldsymbol{c}$. Выразить через них вектор $\overline{SM}$, где M – точка пересечения медиан ΔABC.

Задачи для самостоятельной работы 1

1.8. В ΔABC точки P и F являются серединами сторон AB и AC. Выразить $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\overline{CP}$ через векторы $\boldsymbol{a} = \overline{BP}$ и $\boldsymbol{c} = \overline{BF}$.

1.9. ΔABC построен на векторах $\overline{AB} = \boldsymbol{a}$, $\overline{BC} = \boldsymbol{b}$. Найти векторы, коллинеарные биссектрисам углов этого треугольника.

1.10. В параллелограмме $ABCD$ точка P лежит на AD так, что $\overline{AP} = \dfrac{1}{5}\overline{AD}$ и точка F лежит на AC так, что $\overline{AF} = \dfrac{1}{6}\overline{AC}$. Доказать коллинеарность векторов $\overline{BF}$ и $\overline{FP}$.

1.11. К вершине C прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, построенного на векторах $\overline{AB} = \boldsymbol{a}$, $\overline{AD} = \boldsymbol{b}$, $\overline{AA_1} = \boldsymbol{c}$, приложены силы, изображаемые векторами $\overline{CB}$, $\overline{CA}$, $\overline{CC_1}$. Найти величину и направление равнодействующей этих сил.

1.12. Векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ соединяют вершину треугольной пирамиды с вершинами ее основания. Векторы $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{p}$ соединяют ту же вершину с серединами противолежащих ребер. Доказать, что $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{m} + \boldsymbol{n} + \boldsymbol{p}$.

1.2. Линейная зависимость и независимость системы векторов. Разложение вектора по базису. Ортогональная проекция вектора на направление. Действия над векторами в координатной форме

Линейная зависимость и независимость системы векторов

Определение 1.18. Выражение $\lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 + \ldots + \lambda_n \boldsymbol{a}_n$, где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in R$, называется линейной комбинацией векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots \boldsymbol{a}_n$.

Определение 1.19. Линейная комбинация векторов $\lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + +\lambda_2 \boldsymbol{a}_2 + \ldots + \lambda_n \boldsymbol{a}_n$ называется *тривиальной*, если все λ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ равны нулю $(\forall \lambda_i = 0,\ i = 1, 2, \ldots, n)$.

Определение 1.20. Линейная комбинация векторов $\lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + +\lambda_2 \boldsymbol{a}_2 + \ldots + \lambda_n \boldsymbol{a}_n$ называется *нетривиальной*, если $\exists$ хотя бы одно $\lambda_i \neq 0$.

Определение 1.21. Векторы $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ называются линейно независимыми, если *только тривиальная линейная* комбинация этих векторов равна нулевому вектору:

$$\lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 + \ldots + \lambda_n \boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{0}, \quad (\forall \lambda_i = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n).$$

Определение 1.22. Векторы $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ называются линейно зависимыми, если *существует нетривиальная* линейная комбинация этих векторов, равная нулевому вектору:

$$\lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 + \ldots + \lambda_n \boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{0}, \quad \exists\ \lambda_i \neq 0.$$

Для линейно зависимых векторов справедливы теоремы:

Теорема 1.1. Векторы $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда один из этих векторов является линейной комбинацией остальных.

Теорема 1.2. Если система векторов содержит линейно зависимую подсистему, то она является линейно зависимой.

Теорема 1.3. Любая подсистема линейно независимой системы векторов является линейно независимой.

Теорема 1.4. Система векторов, содержащая нулевой вектор, является линейно зависимой.

Теорема 1.5. Система векторов, содержащая два равных или два пропорциональных вектора, является линейно зависимой.

Теорема 1.6. Два геометрических вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они коллинеарны.

Теорема 1.7. Три геометрических вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они компланарны.

Теорема 1.8. Любые четыре геометрических вектора всегда линейно зависимы.

Разложение вектора по базису

Определение 1.23. Базисом на плоскости называется упорядоченная пара ненулевых неколлинеарных векторов $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ этой плоскости.

Определение 1.24. Базисом в пространстве назовем упорядоченную тройку ненулевых некомпланарных векторов $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ этого пространства.

Теорема 1.9. Любой геометрический вектор $\boldsymbol{a}$ пространства можно разложить по векторам базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$, и это разложение единственно:

$$\boldsymbol{a} = a_1 \boldsymbol{e}_1 + a_2 \boldsymbol{e}_2 + a_3 \boldsymbol{e}_3. \tag{1.2}$$

Определение 1.25. Скалярные величины a_1, a_2, a_3 в разложении вектора $\boldsymbol{a}$ по векторам базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ в формуле (1.2) называются координатами вектора $\boldsymbol{a}$ в базисе e_1, e_2, e_3 $(\boldsymbol{a} = (a_1; a_2; a_3))$.

В частности, на плоскости вектор $\boldsymbol{a} = a_1 \boldsymbol{e}_1 + a_2 \boldsymbol{e}_2$ имеет координаты $\boldsymbol{a} = (a_1; a_2)$, а на оси вектор $\boldsymbol{a} = a_1 \boldsymbol{e}_1$ имеет координату $\boldsymbol{a} = (a_1)$.

Определение 1.26. Упорядоченная тройка некомпланарных векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ называется правой, если при приведении этих векторов к общему началу кратчайший поворот от $\boldsymbol{a}$ к $\boldsymbol{b}$

виден из конца вектора $\boldsymbol{c}$ против часовой стрелки (если кратчайший поворот от $\boldsymbol{a}$ к $\boldsymbol{b}$ совершается по часовой стрелке, то тройка векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ – левая).

Определение 1.27. Упорядоченная тройка взаимно перпендикулярных единичных векторов $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ называется ортонормированным базисом.

В дальнейшем за ортонормированный базис принимаем правую тройку векторов $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$.

Произвольный вектор пространства $\boldsymbol{a}$ можно разложить по векторам ортонормированного базиса $\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}$ или $\boldsymbol{a} = (a_1; a_2; a_3)$. Аналогично на плоскости: $\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j}$ или $\boldsymbol{a} = (a_1; a_2)$, и на оси: $\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{i}$ или $\boldsymbol{a} = (a_1)$.

Ортогональная проекция вектора на направление

Определение 1.28. Ортогональной проекцией вектора $\overline{AB}$ на направление $\boldsymbol{l}$ называется число, равное длине отрезка A_1B_1, где A_1 и B_1 – основания перпендикуляров, опущенных из концов вектора $\overline{AB}$ на направление $\boldsymbol{l}$, взятое со знаком плюс, если направление вектора $\overline{A_1B_1}$ совпадает с направлением $\boldsymbol{l}$, и со знаком минус, если направление вектора $\overline{A_1B_1}$ противоположно направлению $\boldsymbol{l}$.

Обозначим проекцию вектора $\overline{AB}$ на направление $\boldsymbol{l}$ как $\text{пр}_{\boldsymbol{l}}\overline{AB}$. Из рис. 10 следует, что $\text{пр}_{\boldsymbol{l}}\overline{AB} = +A_1B_1$, $\text{пр}_{\boldsymbol{l}}\overline{CD} = -C_1D_1$.

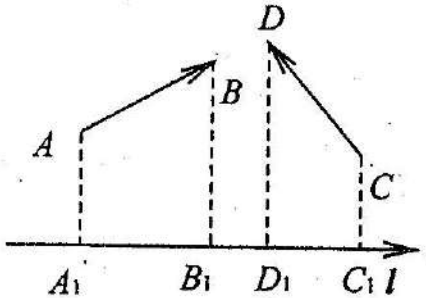

Рис. 10

Теорема 1.10. Проекция вектора на направление равна произведению длины этого вектора на косинус угла между вектором и направлением: $\text{пр}_{\boldsymbol{l}}\overline{AB} = |\overline{AB}| \cos \angle(\overline{AB}, \boldsymbol{l})$.

Теорема 1.11. Проекция суммы векторов на направление $\boldsymbol{l}$ равна сумме проекций слагаемых на это направление: $\text{пр}_{\boldsymbol{l}}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \text{пр}_{\boldsymbol{l}}\boldsymbol{a} + \text{пр}_{\boldsymbol{l}}\boldsymbol{b}$.

Теорема 1.12. Проекция вектора $\boldsymbol{a}$, умноженного на число λ, на направление l равна произведению λ на проекцию вектора $\boldsymbol{a}$ на это направление: $\text{пр}_{\boldsymbol{l}}(\lambda\boldsymbol{a}) = \lambda\text{пр}_{\boldsymbol{l}}\boldsymbol{a}$.

Проекции вектора $\boldsymbol{a}$ на базисные орты $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ совпадают с координатами вектора $\boldsymbol{a}$ в базисе $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$: если $\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}$, то $a_1 = \text{пр}_{\boldsymbol{i}}\boldsymbol{a}$, $a_2 = \text{пр}_{\boldsymbol{j}}\boldsymbol{a}$, $a_3 = \text{пр}_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{a}$.

Действия над векторами в координатной форме

Пусть векторы $\boldsymbol{a} = (a_1; a_2; a_3)$ и $\boldsymbol{b} = (b_1; b_2; b_3)$ заданы своими координатами.

У равных векторов соответствующие координаты попарно равны: если $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$, то $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, $a_3 = b_3$.

При сложении (вычитании) векторов их одноименные координаты складываются (вычитаются): $\boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{b} = (a_1 \pm b_1; a_2 \pm b_2; a_3 \pm b_3)$.

При умножении вектора $\boldsymbol{a}$ на скаляр λ все его координаты умножаются на скаляр λ: $\lambda\boldsymbol{a} = (\lambda a_1; \lambda a_2; \lambda a_3)$.

У коллинеарных векторов одноименные координаты пропорциональны:

$$\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}. \tag{1.3}$$

Модуль вектора в ортонормированном базисе равен арифметическому значению квадратного корня из суммы квадратов его координат:

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}. \tag{1.4}$$

Определение 1.29. Направляющими косинусами вектора $\boldsymbol{a}$ называются косинусы тех углов, которые этот вектор образует с базисными векторами $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$.

Направляющие косинусы вектора $\boldsymbol{a} = (a_1; a_2; a_3)$ находим по формулам:

$$\cos\alpha = \frac{a_1}{|\boldsymbol{a}|};\quad \cos\beta = \frac{a_2}{|\boldsymbol{a}|};\quad \cos\gamma = \frac{a_3}{|\boldsymbol{a}|}. \tag{1.5}$$

Сумма квадратов направляющих косинусов равна единице:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \tag{1.6}$$

Направляющие косинусы вектора являются координатами его орта:

$$\boldsymbol{a}^0 = (\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma). \tag{1.7}$$

Базисные векторы $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$, исходящие из начала координат $O(0; 0; 0)$ определяют положительные направления осей Ox, Oy, Oz ($\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ – орты осей). Вектор $\overline{OM}$, начало которого совпадает с началом координат O, а концом является произвольная точка $M(x; y; z)$, называется радиусом-вектором точки M: $\overline{OM} = (x; y; z)$.

Если вектор $\overline{AB}$ задан координатами начала $A(x_1; y_1; z_1)$ и конца $B(x_2; y_2; z_2)$, то координаты вектора $\overline{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$.

Решение типовых задач

Пример 1.5. Найти длину и направляющие косинусы вектора $\boldsymbol{a} = 6\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}$.

Решение. Длину вектора находим по формуле (1.4): $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{6^2 + (-2)^2 + (-3)^2} = 7$. По формулам (1.5) находим направляющие косинусы вектора:

$$\cos\alpha = \frac{6}{7},\quad \cos\beta = \frac{-2}{7},\quad \cos\gamma = \frac{-3}{7}.$$

Пример 1.6. Найти координаты вектора $\boldsymbol{a}$, образующего с координатными осями равные острые углы, если длина этого вектора равна $3\sqrt{3}$.

Решение. Так как $\alpha = \beta = \gamma$, то подставляя $\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma$ в формулу (1.6), получим $3\cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. Вектор $\boldsymbol{a}$ образует с координатными осями острые углы; используя формулы (1.7), находим орт $\boldsymbol{a}^0 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. Тогда по формуле (1.1) находим координаты вектора $\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0 \Rightarrow \boldsymbol{a} = (3; 3; 3)$.

Пример 1.7. Заданы три некомпланарных вектора $\boldsymbol{e}_1 = 2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{e}_2 = 3\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{e}_3 = 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$. Разложить вектор $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$ по базису $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$.

Решение. Аналогично формуле (1.2) запишем разложение вектора $\boldsymbol{d}$ по базису: $\boldsymbol{d} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3 \Rightarrow \boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k} = x(2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{k}) + y(3\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}) + z(2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k})$ или $(2x + 3y)\boldsymbol{i} + (3y + 2z)\boldsymbol{j} + (-x + 3z)\boldsymbol{k} = \boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$. Приравнивая коэффициенты при ортах $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ слева и справа, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 3y + 2z = 5 \\ -x + 3z = -2. \end{cases}$$

Решая систему уравнений, находим: $x = -4$, $y = 3$, $z = -2$. Запишем разложение вектора $\boldsymbol{d} = -4\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2 - 2\boldsymbol{e}_3 \Rightarrow \boldsymbol{d} = (-4; 3; -2)$ – координаты вектора $\boldsymbol{d}$ в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$.

Пример 1.8. Найти вектор $\boldsymbol{a}$, коллинеарный вектору $\boldsymbol{c} = 3\boldsymbol{i} - 6\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$, составляющий с осью Ox тупой угол, если $|\boldsymbol{a}| = 14$.

Решение. Из формулы (1.1) находим вектор $\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0$. Так как вектор $\boldsymbol{a}$ коллинеарен вектору $\boldsymbol{c}$ и образует тупой угол с осью Ox, а вектор $\boldsymbol{c}$ образует острый угол с осью Ox ($\text{пр}_i\,\boldsymbol{c} = 3 > 0$), то $\boldsymbol{a}^0 = -\boldsymbol{c}^0$. Вектор $\boldsymbol{a}$ находим по формуле $\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|(-\boldsymbol{c}^0) = |\boldsymbol{a}|\left(-\frac{\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{c}|}\right)$. Найдем длину вектора $\boldsymbol{c}$: $|\boldsymbol{c}| = \sqrt{3^2 + (-6)^2 + 2^2} \Rightarrow |\boldsymbol{c}| = 7$. Находим вектор $\boldsymbol{a}$: $\boldsymbol{a} = 14\frac{1}{7}(-3\boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}) \Rightarrow \boldsymbol{a} = -6\boldsymbol{i} + 12\boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k}$.

Пример 1.9. Найти вектор $\boldsymbol{c}$, направленный по биссектрисе угла, образованного векторами $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{b} = -4\boldsymbol{i} + 7\boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k}$, если $|\boldsymbol{c}| = 3\sqrt{6}$.

Решение. Чтобы вектор $\boldsymbol{c}$ был направлен по биссектрисе, вектор $\boldsymbol{c}$ должен быть диагональю ромба. Найдем модули векторов: $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-1)^2} \Rightarrow |\boldsymbol{a}| = 3$ и $|\boldsymbol{b}| = \sqrt{(-4)^2 + 7^2 + (-4)^2} \Rightarrow |\boldsymbol{b}| = 9$ и орты $\boldsymbol{a}^0 = \dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$ и $\boldsymbol{b}^0 = \dfrac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$, $\boldsymbol{a}^0 = \dfrac{2}{3}\boldsymbol{i} - \dfrac{2}{3}\boldsymbol{j} - \dfrac{1}{3}\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{b}^0 = \dfrac{-4}{9}\boldsymbol{i} + \dfrac{7}{9}\boldsymbol{j} - \dfrac{4}{9}\boldsymbol{k}$. Тогда вектор $\boldsymbol{a}^0 + \boldsymbol{b}^0 = \dfrac{2}{9}\boldsymbol{i} + \dfrac{1}{9}\boldsymbol{j} - \dfrac{7}{9}\boldsymbol{k}$ направлен по биссектрисе. Найдем модуль вектора $\boldsymbol{a}^0 + \boldsymbol{b}^0$: $|\boldsymbol{a}^0 + \boldsymbol{b}^0| = \sqrt{\left(\dfrac{2}{9}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{9}\right)^2 + \left(-\dfrac{7}{9}\right)^2} \Rightarrow |\boldsymbol{a}^0 + \boldsymbol{b}^0| = \dfrac{1}{3}\sqrt{6}$ и орт $(\boldsymbol{a}^0 + \boldsymbol{b}^0)^0 = \dfrac{2}{3\sqrt{6}}\boldsymbol{i} + \dfrac{1}{3\sqrt{6}}\boldsymbol{j} - \dfrac{7}{3\sqrt{6}}\boldsymbol{k}$. Находим вектор $\boldsymbol{c} = |\boldsymbol{c}|(\boldsymbol{a}^0 + \boldsymbol{b}^0)^0 \Rightarrow \boldsymbol{c} = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 7\boldsymbol{k}$.

Контрольное задание 2

1.13. Найти координаты вектора $2\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} - 3\boldsymbol{c}$, если $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{b} = 3\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$.

1.14. Даны точки $A(1; -5; 10)$, $B(-5; 7; -8)$, $C(2; 2; -7)$, $D(5; -4; 2)$. Проверить: 1) коллинеарны ли векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$; 2) какой из векторов длиннее другого и как они направлены; 3) найти орт вектора $\overline{CD}$.

1.15. Разложить вектор $\boldsymbol{d} = 2\boldsymbol{i} - 6\boldsymbol{j}$ по векторам $\boldsymbol{a} = (1; 2; -1)$, $\boldsymbol{b} = (0; 2; -1)$, $\boldsymbol{c} = (0; 0; 3)$.

1.16. Найти вектор $\boldsymbol{c}$, коллинеарный вектору $\boldsymbol{a} = 4\boldsymbol{i} - 7\boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k}$, образующий с осью Oy острый угол, если $|\boldsymbol{c}| = 18$.

1.17. Радиус-вектор точки P образует с осью Ox угол $\dfrac{\pi}{3}$, а с осью Oz угол $\dfrac{\pi}{4}$, длина радиуса-вектора равна 4. Найти координаты точки P, если ордината ее отрицательна.

1.18. Найти координаты векторов, образующих с координатными осями равные углы, если длина их равна $5\sqrt{3}$.

1.19. При каких значениях α и β векторы $\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{i} + \alpha\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + \beta\boldsymbol{k}$ коллинеарны?

Задачи для самостоятельной работы 2

1.20. Найти вектор $\boldsymbol{b}$, коллинеарный вектору $\boldsymbol{c} = 3\boldsymbol{i} - 5\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$, образующий с осью Ox тупой угол, длина которого равна $10\sqrt{2}$.

1.21. Найти координаты вектора $\boldsymbol{a}$, образующего с осями координат углы $\alpha = \dfrac{3}{4}\pi$, $\beta = \dfrac{\pi}{3}$, длина которого равна 8.

1.22. Найти вектор $\boldsymbol{c}$, направленный по биссектрисе угла, образованного векторами $\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{b} = 4\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{k}$, и имеющий длину, равную $6\sqrt{6}$.

1.23. Даны векторы $\boldsymbol{a} = (2; 1; 1)$, $\boldsymbol{b} = (-1; 2; -2)$, $\boldsymbol{c} = (2; -1; 3)$, $\boldsymbol{d} = (-1; 1; -1)$. Разложить каждый из векторов по трем другим векторам.

1.24. Параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ построен на векторах $\overline{AB} = \boldsymbol{a}$, $\overline{AD} = \boldsymbol{b}$, $\overline{AA_1} = \boldsymbol{c}$. В базисе из ребер $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ найти координаты вектора $\overline{AO_1}$, где O_1 – точка пересечения диагоналей параллелограмма $A_1B_1C_1D_1$.

1.3. Скалярное произведение векторов

Определение 1.30. Скалярным произведением $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ ненулевых векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называется число, равное произведению их длин на косинус угла между ними:

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \cos \angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}). \tag{1.8}$$

Механический смысл скалярного произведения заключается в следующем: если $\boldsymbol{b}$ – вектор силы, $\boldsymbol{a}$ – вектор пути, то $A = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ – работа, совершаемая силой $\boldsymbol{b}$ по перемещению материальной точки из начала вектора $\boldsymbol{a}$ в его конец.

Законы скалярного произведения:

1. $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}$ (переместительный).

2. $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})$ (распределительный).
3. $\lambda\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$ (сочетательный).

Свойства скалярного произведения в векторной форме

1. Скалярное произведение двух ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда они ортогональны:

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0,\ \ \boldsymbol{a}\neq 0,\ \ \boldsymbol{b}\neq 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}. \tag{1.9}$$

2. Модуль вектора равен арифметическому значению квадратного корня из скалярного произведения вектора на самого себя:

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}. \tag{1.10}$$

3. Косинус угла между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ вычисляем по формуле

$$\cos\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}. \tag{1.11}$$

4. Ортогональную проекцию векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ находим по формулам:

$$\text{пр}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|};\ \ \text{пр}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|}. \tag{1.12}$$

Если векторы $\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}, \boldsymbol{b}=b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k}$ заданы координатами в ортонормированном базисе, то скалярное произведение векторов находим по формуле

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3. \tag{1.13}$$

Свойства скалярного произведения в координатной форме

1. Необходимое и достаточное условие ортогональности векторов:

$$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0. \tag{1.14}$$

2. Модуль вектора равен арифметическому значению квадратного корня из суммы квадратов его координат:

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}. \tag{1.15}$$

3. Косинус угла между векторами находим по формуле

$$\cos\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}. \tag{1.16}$$

4. Ортогональную проекцию векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ вычисляем по формулам:

$$\text{пр}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}};\ \ \text{пр}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}. \tag{1.17}$$

Решение типовых задач

Пример 1.10. Векторы $\boldsymbol{d}_1=4\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{d}_2=-2\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{c}$ являются диагоналями параллелограмма. Найти длину сторон параллелограмма, если $|\boldsymbol{a}|=2$, $|\boldsymbol{c}|=1$, $\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})=\frac{\pi}{3}$.

Решение. Пусть сторонами параллелограмма являются векторы $\boldsymbol{m}$ и $\boldsymbol{n}$. Используя правила сложения и вычитания векторов, получим систему уравнений: $\begin{cases}\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}=4\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}\\ \boldsymbol{m}-\boldsymbol{n}=-2\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{c},\end{cases}$ решая которую, найдем векторы $\boldsymbol{m}=\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{n}=3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{c}$. Находим длины сторон параллелограмма по формуле (1.10):

$$|\boldsymbol{m}|=\sqrt{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{m}}=\sqrt{(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{c})}=$$
$$=\sqrt{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})+6(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})+9(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c})}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow|\boldsymbol{m}|=\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2+6|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{c}|\cos\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})+9|\boldsymbol{c}|^2}=$$
$$=\sqrt{2^2+6\cdot 2\cdot 1\cdot\frac{1}{2}+9\cdot 1^2}\Rightarrow|\boldsymbol{m}|=\sqrt{19};$$

$$|n| = \sqrt{(3a-2c)\cdot(3a-2c)} =$$
$$= \sqrt{9|a|^2 - 12|a||c|\cos\angle(a,c) + 4|c|^2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |n| = \sqrt{9\cdot 2^2 - 12\cdot 2\cdot 1\cdot \frac{1}{2} + 4\cdot 1^2} \Rightarrow |n| = \sqrt{28}.$$

Пример 1.11. Найти $\text{пр}_{c}a$, если векторы $a = m - 3n$ и $c = 2m + n$, где $|m| = 2$, $|n| = \sqrt{2}$, $\angle(m,n) = \frac{3\pi}{4}$.

Решение. Согласно формуле (1.12), можно записать $\text{пр}_c a = \frac{a\cdot c}{|c|}$. Найдем скалярное произведение $a\cdot c = (m-3n)\cdot(2m+n) = 2|m|^2 - 5|m||n|\cos\angle(m,n) - 3|n|^2 \Rightarrow a\cdot c = 2\cdot 2^2 - 5\cdot 2\cdot\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 3\left(\sqrt{2}\right)^2 = 12$. Найдем модуль вектора c: $|c| = \sqrt{(2m+n)\cdot(2m+n)} = \sqrt{4|m|^2 + 4|m||n|\cos\angle(m,n) + |n|^2} \Rightarrow$
$$\Rightarrow |c| = \sqrt{4\cdot 2^2 + 4\cdot 2\cdot\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + (\sqrt{2})^2} \Rightarrow |c| = \sqrt{10}.$$

Следовательно, $\text{пр}_c a = \frac{12}{\sqrt{10}} = \frac{6}{5}\sqrt{10}$.

Пример 1.12. В $\triangle ABC$ (рис. 11) заданы векторы $\overline{AB} = (3;1;2)$ и $\overline{AC} = (5;-1;3)$. Точка P является основанием высоты, опущенной из вершины A на сторону BC. Найти координаты вектора $\overline{BP}$.

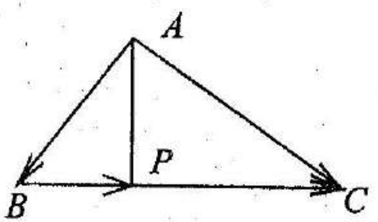

Рис. 11

Решение. Находим вектор $\overline{BC} = \overline{AC} - \overline{AB} \Rightarrow \overline{BC} = (2;-2;1)$ и его длину: $|\overline{BC}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = 3$.

Длина вектора $\overline{BP}$ равна модулю проекции вектора $\overline{BA}$ на вектор $\overline{BC}$: $|\overline{BP}| = |\text{пр}_{\overline{BC}}\overline{BA}| \Rightarrow$ (по формуле (1.12)): $|\overline{BP}| = \frac{|\overline{BA}\cdot\overline{BC}|}{|\overline{BC}|}$. Используя формулу (1.17), получим $|\overline{BP}| = \frac{1}{3}|(-3)\cdot 2 + (-1)\cdot(-2) + (-2)\cdot 1| = 2$. Так как вектор $\overline{BP}$ коллинеарен вектору $\overline{BC}$, то $\overline{BP} = |\overline{BP}|\overline{BC}^0 \Rightarrow$
$$\Rightarrow \overline{BP} = |\overline{BP}|\frac{\overline{BC}}{|\overline{BC}|} \Rightarrow \overline{BP} = \frac{2}{3}(2i - 2j + k) \Rightarrow \overline{BP} = \left(\frac{4}{3}; -\frac{4}{3}; \frac{2}{3}\right).$$

Пример 1.13. Найти косинус угла между векторами $a = 3i + 9j - 12k$ и $c = 4i + 7j + 4k$.

Решение. По формуле (1.11) запишем: $\cos\angle(a,c) = \frac{a\cdot c}{|a||c|}$. Находим $a\cdot c = 3\cdot 4 + 9\cdot 7 + (-12)\cdot 4 = 27$, $|a| = \sqrt{3^2 + 9^2 + (-12)^2} = 3\sqrt{1^2 + 3^2 + 4^2} = 3\sqrt{26}$, $|c| = \sqrt{4^2 + 7^2 + 4^2} = 9$. Тогда $\cos\angle(a,c) = \frac{27}{3\sqrt{26}\cdot 9} = \frac{1}{\sqrt{26}}$.

Пример 1.14. Найти значение λ, при котором векторы $a = 3i + \lambda j - 2k$ и $c = 2i + 4j + \lambda k$ будут ортогональны.

Решение. Используя формулы (1.9) и (1.14), находим скалярное произведение $a\cdot c = 0 \Rightarrow 6 + 4\lambda - 2\lambda = 0 \rightarrow \lambda = -3$.

Контрольное задание 3

1.25. Найти длину диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $a = 5m + n$ и $b = m - 2n$, если $|m| = 1$, $|n| = 3$, $\angle(m,n) = \frac{2\pi}{3}$.

1.26. Найти угол между векторами $a = 3m - 2n$ и $c = 4m + 3n$, если $|m| = \sqrt{2}$, $|n| = 2$, $\angle(m,n) = \frac{3\pi}{4}$.

1.27. Найти значение α, при котором векторы $a + \alpha c$ и $3a - 4c$ будут ортогональны, если $|a| = \sqrt{3}$, $|c| = 1$, $\angle(a,c) = \frac{\pi}{6}$.

1.28. Найти проекцию вектора $c = (1;7;-5)$ на ось, составляющую с координатными осями равные острые углы.

1.29. В $\triangle ABC$ заданы вершины $A(2;-2;1)$, $B(2;1;-3)$, $C(-3;-1;-1)$. Найти косинус угла BAC.

1.30. Даны векторы $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = 3\boldsymbol{i} + \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c} = 3\boldsymbol{j} - 5\boldsymbol{k}$. Найти $\text{пр}_{\boldsymbol{a}}(3\boldsymbol{b} + 2\boldsymbol{c})$.

1.31. Найти координаты вектора $\boldsymbol{a}$, коллинеарного вектору $\boldsymbol{c} = (1;3;-2)$ и удовлетворяющего условию $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} = 28$.

1.32. Параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ построен на векторах $\overline{AB} = (1;0;1)$, $\overline{AD} = (2;1;3)$, $\overline{AA_1} = (0;1;4)$. Найти проекцию диагонали $\overline{AC_1}$ на диагональ $\overline{AD_1}$ и косинус угла между векторами $\overline{AD_1}$ и $\overline{AC}$.

1.33. Дан четырехугольник $ABCD$ с вершинами $A(1;-2;2)$, $B(1;4;0)$, $C(-4;1;1)$, $D(-5;-5;3)$. Доказать ортогональность диагоналей $\overline{AC}$ и $\overline{BD}$.

Задачи для самостоятельной работы 3

1.34. Найти $\text{пр}_{\boldsymbol{m}}\, \boldsymbol{n}$, если векторы $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{n} = 5\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c}$, где $|\boldsymbol{a}| = 3$, $|\boldsymbol{c}| = 2$, $\angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) = \dfrac{\pi}{3}$.

1.35. Векторы $2\boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{c}$ и $8\boldsymbol{a} - 5\boldsymbol{c}$ являются диагоналями параллелограмма. Найти длины его сторон, если $|\boldsymbol{a}| = 2$, $|\boldsymbol{c}| = \sqrt{3}$, $\angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) = \dfrac{\pi}{6}$.

1.36. Найти косинус угла между векторами $\boldsymbol{m}$ и $\boldsymbol{n}$, если векторы $\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{m} - \boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{c} = 2\boldsymbol{m} + 5\boldsymbol{n}$ взаимно ортогональны и $|\boldsymbol{m}| = 2$, $|\boldsymbol{n}| = 3$.

1.37. Найти α, при котором векторы $\boldsymbol{m} = -2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + \alpha\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{n} = \alpha\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k}$ ортогональны.

1.38. Параллелограмм $ABCD$ построен на векторах $\overline{AB} = (2;3;0)$ и $\overline{AD} = (2;0;1)$. Найти проекции вектора $\overline{AB}$ на диагонали $\overline{DB}$ и $\overline{AC}$.

1.39. Даны вершины $A(5;-4;1)$, $B(1;-2;3)$, $C(3;-1;4)$ треугольника ABC. Определить внешний угол при вершине C.

1.40. Найти $\text{пр}_{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b})$, если $\boldsymbol{a} = 5\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$.

1.41. Найти координаты вектора $\boldsymbol{c}$, коллинеарного вектору $\boldsymbol{a} = (3;-1;4)$, если $\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{a} = 13$.

1.42. Даны точки $A(4;-6;8)$ и $B(7;-13;2)$. Найти $\text{пр}_{\overline{AB}}(2\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c})$, если $\boldsymbol{a} = (-1;-2;0)$ и $\boldsymbol{c} = (0;3;9)$.

1.4. Векторное произведение векторов

Определение 1.31. Векторным произведением $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называется вектор $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$, удовлетворяющий условиям (рис. 12):

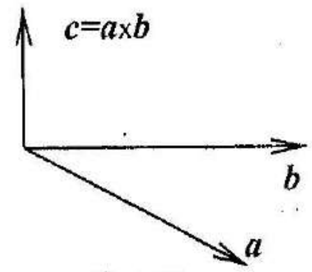

Рис. 12

1) модуль вектора равен произведению модулей перемножаемых векторов на синус угла между ними:

$$|\boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cdot \sin \angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}); \tag{1.18}$$

2) вектор $\boldsymbol{c}$ ортогонален векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ ($\boldsymbol{c} \perp \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{c} \perp \boldsymbol{b}$);

3) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ – правая тройка векторов.

Геометрический смысл векторного произведения: модуль векторного произведения векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ численно равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$:

$$S = |\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|. \tag{1.19}$$

Площадь треугольника, построенного на векторах $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, равна половине модуля векторного произведения этих векторов:

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|. \tag{1.20}$$

Механический смысл векторного произведения заключается в следующем: если вектор $\boldsymbol{b}$ является силой, приложенной к точке A, а вектор $\boldsymbol{a}$ направлен из точки O в точку A, то векторное произведение $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ равно моменту силы $\boldsymbol{b}$ относительно точки O.

Законы векторного произведения:

1) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a})$ (антипереместительный);

2) $\lambda(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = (\lambda \boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \times (\lambda \boldsymbol{b})$ (сочетательный);

3) $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}$; $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$ (распределительный).

Векторное произведение равно нулю, если $\boldsymbol{a} = 0$, или $\boldsymbol{b} = 0$, или векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ коллинеарны $(\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b})$.

Если векторы $\boldsymbol{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\boldsymbol{b} = (b_1; b_2; b_3)$ заданы координатами в ортонормированном базисе, то векторное произведение векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ вычисляем по формуле

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}. \qquad (1.21)$$

Решение типовых задач

Пример 1.15. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{m} - 2\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{m} - 3\boldsymbol{n}$, если $|\boldsymbol{m}| = 5$, $|\boldsymbol{n}| = 2$, $\angle(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}) = \frac{\pi}{6}$.

Решение. Используя формулу (1.19), площадь параллелограмма вычисляем по формуле $S = |\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}|$. Найдем векторное произведение векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{c}$: $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} = (3\boldsymbol{m} - 2\boldsymbol{n}) \times (\boldsymbol{m} - 3\boldsymbol{n}) = 3(\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{m}) - 9(\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n}) - 2(\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{m}) + 6(\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n})$, но $\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{m} = \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n} = 0$, $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{m} = -(\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n})$, следовательно $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} = -7(\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n})$. Тогда $S = |-7(\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n})| \Rightarrow S = 7|\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n}|$. По формуле (1.18) находим $S = 7 \cdot |\boldsymbol{m}| \cdot |\boldsymbol{n}| \cdot \sin \angle(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}) \Rightarrow S = 7 \cdot 5 \cdot 2 \cdot \sin \frac{\pi}{6} = 35$.

Пример 1.16. Упростить выражение $(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}) \times \boldsymbol{b} + (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}) \times \boldsymbol{c} + (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) \times \boldsymbol{a}$.

Решение. Используя свойства векторного произведения, получим

$$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) - (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) - (\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}) - (\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}) - (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) - (\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}) + (\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}) + (\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) - (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) - (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}) = 2(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}).$$

Пример 1.17. Найти координаты единичных векторов, ортогональных к плоскости $\triangle ABC$, где $A(1;-2;3)$, $B(3;0;4)$, $C(3;1;5)$.

Решение. Найдем координаты векторов $\overline{AB} = (2;2;1)$, $\overline{AC} = (2;3;2)$. Так как вектор $\boldsymbol{n} \perp \overline{AB}$ и $\boldsymbol{n} \perp \overline{AC}$, то вектор $\boldsymbol{n} = \overline{AB} \times \overline{AC}$. Используя формулу (1.21), находим

$$\boldsymbol{n} = \overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{n} = \boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}, \quad |\boldsymbol{n}| = 3.$$

Находим единичные векторы, ортогональные к плоскости треугольника:

$$\boldsymbol{n}^0 = \pm\frac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|} \Rightarrow \boldsymbol{n}^0 = \pm\frac{1}{3}\boldsymbol{i} \mp \frac{2}{3}\boldsymbol{j} \pm \frac{2}{3}\boldsymbol{k}.$$

Пример 1.18. В плоскости YOZ найти вектор $\boldsymbol{c}$, ортогональный вектору $\boldsymbol{a} = (3;-2;-1)$, если $|\boldsymbol{c}| = 2\sqrt{5}$.

Решение. По условию задачи $\boldsymbol{c} \perp \boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{c} \perp \boldsymbol{a} \Rightarrow \boldsymbol{c} \parallel (\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{a}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$.

Следовательно, находим вектор $\boldsymbol{c} = |\boldsymbol{c}|\left(\pm\frac{\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{a}|}\right) \Rightarrow \boldsymbol{c} = 2\sqrt{5}\left(\pm\frac{\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}}{\sqrt{5}}\right) \Rightarrow \boldsymbol{c} = \pm 2\boldsymbol{j} \mp 4\boldsymbol{k}$.

Пример 1.19. Параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ построен на векторах $\overline{AB} = (1;-1;0)$, $\overline{AD} = (-2;1;2)$, $\overline{AA_1} = (3;2;1)$. Вычислить площадь сечения BA_1C_1 и длину высоты $\triangle BA_1C_1$, опущенной из вершины B на сторону A_1C_1 (рис. 13).

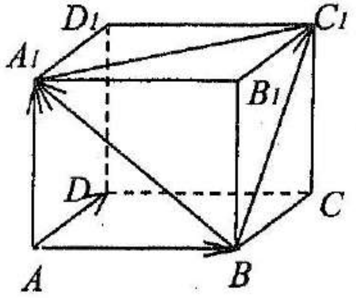

Рис. 13

Решение. Найдем векторы $\overline{BA_1} = \overline{BA} + \overline{AA_1} \Rightarrow \overline{BA_1} = (2;3;1)$ и $\overline{BC_1} = \overline{BC}+\overline{CC_1} = \overline{AD}+\overline{AA_1} = (1;3;3)$. Используя формулу (1.20), находим $S_\Delta = \frac{1}{2}|\overline{BC_1}\times\overline{BA_1}|$. Найдем векторное произведение $\overline{BC_1}\times\overline{BA_1}$:

$$\overline{BC_1}\times\overline{BA_1} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -6\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}.$$

Находим $S_\Delta = \frac{1}{2}\sqrt{(-6)^2+5^2+(-3)^2} \Rightarrow S_\Delta = \frac{1}{2}\sqrt{70}$. Используя другую формулу для вычисления площади треугольника, запишем: $S_\Delta = \frac{1}{2}h|\overline{A_1C_1}|$, где h – высота, опущенная из точки B на сторону A_1C_1. Найдем вектор $\overline{A_1C_1} = \overline{A_1B_1} + \overline{B_1C_1} \Rightarrow \overline{A_1C_1} = \overline{AB}+\overline{AD} = (-1;0;2)$ и его длину $|\overline{A_1C_1}| = \sqrt{5}$. Тогда из равенства $\frac{1}{2}\sqrt{70} = \frac{1}{2}h\sqrt{5} \Rightarrow h = \sqrt{14}$.

Контрольное задание 4

1.43. Упростить выражение $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{a}$.

1.44. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $2\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}$ и $3\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n}$, если $|\boldsymbol{m}| = 4$, $|\boldsymbol{n}| = 2\sqrt{2}$ и $\angle(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}) = \frac{\pi}{4}$.

1.45. Вычислить длины диагоналей и площадь параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$.

1.46. Точки $A(-2;1;3)$, $B(-1;3;0)$, $C(-4;2;-1)$ являются вершинами $\triangle ABC$. Вычислить площадь треугольника и длину его высоты, опущенной из вершины C на сторону AB.

1.47. Вектор $\boldsymbol{a}$ ортогонален оси Oz и вектору $\boldsymbol{c} = -2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$, образует с осью Oy острый угол и $|\boldsymbol{a}| = 3\sqrt{5}$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{a}$.

1.48. Найти координаты вектора $\boldsymbol{p}$, который ортогонален векторам $\boldsymbol{a} = (5;-2;3)$ и $\boldsymbol{c} = (-1;4;-3)$ и удовлетворяет условию $\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{b} = 12$, где $\boldsymbol{b} = 2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$.

1.49. Сила $\boldsymbol{f} = 2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$ приложена к точке $N(2;-5;3)$. Найти момент этой силы относительно точки $P(1;-3;-1)$.

1.50. Векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ удовлетворяют условию $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c} = 0$. Доказать, что $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c} = \boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$.

1.51. Найти координаты единичных векторов, перпендикулярных к плоскости $\triangle ABC$, построенного на векторах $\overline{AB} = (1;-1;2)$ и $\overline{AC} = (1;1;4)$.

Задачи для самостоятельной работы 4

1.52. Найти $|(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{c})\times(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})|$, если векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{c}$ ортогональны и $|\boldsymbol{a}| = 4$, $|\boldsymbol{c}| = 3$.

1.53. Найти площадь параллелограмма, диагоналями которого являются векторы $3\boldsymbol{m}+2\boldsymbol{n}$ и $-5\boldsymbol{m}+4\boldsymbol{n}$, если $|\boldsymbol{m}| = \sqrt{2}$, $|\boldsymbol{n}| = 2$, $\angle(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}) = \frac{3\pi}{4}$.

1.54. Найти координаты единичного вектора $\boldsymbol{p}$, перпендикулярного векторам $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{c} = 2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$ и образующего с осью Oz тупой угол.

1.55. Даны векторы $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c} = -\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{p}$, ортогонального векторам $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$, если $\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{a} = -8$.

1.56. Вычислить площадь треугольника с вершинами в точках $A(2;-2;3)$, $B(3;-3;4)$, $C(1;0;1)$ и длину его высоты, опущенной из вершины B на сторону AC.

1.57. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{m} = 2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{a}+3\boldsymbol{c}$, если $|\boldsymbol{a}| = 2\sqrt{3}$, $|\boldsymbol{c}| = \sqrt{3}$, $\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}) = \frac{5\pi}{6}$.

1.58. Сила $\boldsymbol{f} = (1; -2; 3)$ приложена к точке $P(3; 1; 1)$. Найти момент этой силы относительно точки $A(2; 0; 2)$.

1.59. Упростить выражение $\Big((\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{c}+2\boldsymbol{a})\Big)+\Big((\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{c})\times \times(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\Big)$.

1.5. Смешанное произведение трех векторов

Определение 1.32. Смешанным произведением векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ называется число, равное скалярному произведению вектора $\boldsymbol{a}$ на векторное произведение $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$:

$$\boldsymbol{abc} = \boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}. \tag{1.22}$$

Свойства смешанного произведения

1. При круговой перестановке сомножителей смешанное произведение не меняется ($\boldsymbol{abc} = \boldsymbol{bca} = \boldsymbol{cab}$, $\boldsymbol{acb} = \boldsymbol{cba} = \boldsymbol{bac}$).

2. При перестановке двух векторов смешанное произведение меняет знак ($\boldsymbol{abc} = -\boldsymbol{acb} = -\boldsymbol{cba} = -\boldsymbol{bac}$).

3. Смешанное произведение равно нулю, если хотя бы один из векторов нулевой или два вектора коллинеарны.

4. Смешанное произведение трех ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда векторы компланарны.

5. Смешанное произведение векторов положительно ($\boldsymbol{abc} > 0$) тогда и только тогда, когда тройка векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ является правой.

Смешанное произведение векторов отрицательно ($\boldsymbol{abc} < 0$) тогда и только тогда, когда тройка векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ является левой.

Геометрический смысл смешанного произведения: модуль смешанного произведения векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ равен объему параллелепипеда, построенного на этих векторах:

$$V_{\text{пар}} = |\boldsymbol{abc}|. \tag{1.23}$$

Объем треугольной пирамиды, образованной векторами $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, вычисляем по формуле

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{6}|\boldsymbol{abc}|. \tag{1.24}$$

Если векторы $\boldsymbol{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\boldsymbol{b} = (b_1; b_2; b_3)$, $\boldsymbol{c} = (c_1; c_2; c_3)$, заданы координатами в ортонормированном базисе, то смешанное произведение этих векторов равно определителю третьего порядка, составленному из координат перемножаемых векторов:

$$\boldsymbol{abc} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \tag{1.25}$$

Необходимое и достаточное условие компланарности векторов $\boldsymbol{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\boldsymbol{b} = (b_1; b_2; b_3)$, $\boldsymbol{c} = (c_1; c_2; c_3)$ имеет вид

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{1.26}$$

Объем параллелепипеда, построенного на векторах $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$, в координатной форме вычисляем по формуле

$$V_{\text{пар}} = \left|\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}\right|. \tag{1.27}$$

Объем треугольной пирамиды, построенной на векторах $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$, в координатной форме вычисляем по формуле

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}\right|. \tag{1.28}$$

Решение типовых задач

Пример 1.20. Найти объем параллелепипеда, построенного на векторах $\boldsymbol{m} = 2\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{p} = 3\boldsymbol{a} + 4\boldsymbol{c}$, если взаимно ортогональные векторы $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ образуют правую тройку векторов и $|\boldsymbol{a}| = 1$, $|\boldsymbol{b}| = 2$, $|\boldsymbol{c}| = 3$.

Решение. Используя формулу (1.23), получим $V = |\boldsymbol{mnp}|$ или $V = |(2\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}) \cdot ((\boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{c}) \times (3\boldsymbol{a} + 4\boldsymbol{c}))|$. Найдем $(\boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{c}) \times (3\boldsymbol{a} + 4\boldsymbol{c}) = 3(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a}) + 4(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}) + 9(\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) + 12(\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{c}) = -5(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c})$, так как $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = 0$, $\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a} = -(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c})$, $\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{c} = 0$. Тогда объем параллелепипеда $V = |(2\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}) \cdot (-5)(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c})| = 5|(2\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}) \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c})| = 5|2\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}) + \boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c})|$.

Так как смешанное произведение, в котором два одинаковых вектора, равно нулю, то $V = 5|\boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c})|$. Поскольку векторные произведения $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}) \perp \boldsymbol{a}$, $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}) \perp \boldsymbol{c} \Rightarrow (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}) \parallel \boldsymbol{b}$ и направлен в ту же сторону (тройка векторов – правая), запишем $V = 5|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}| \cos 0$, но $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{c}| \sin\frac{\pi}{2} \Rightarrow |\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}| = 1 \cdot 3 \cdot 1 = 3$. Окончательно получим $V = 5 \cdot 2 \cdot 3 \Rightarrow V = 30$.

Пример 1.21. Найти объем треугольной пирамиды $SABC$, образованной векторами $\overline{AB} = (2; 3; 1)$, $\overline{AC} = (1; 2; 0)$, $\overline{AS} = (0; -1; -3)$ и ее высоту, опущенную на грань ABS.

Решение. По формуле (1.28) найдем объем треугольной пирамиды: $V = \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \end{vmatrix}\right| \Rightarrow V = \frac{1}{6}|2 \cdot (-6) - 3 \cdot (-3) + 1 \cdot (-1)| \Rightarrow V = \frac{1}{6}|-12 + 9 - 1| \Rightarrow V = \frac{2}{3}$. Находим площадь $\Delta ABS : S = \frac{1}{2}|\overline{AB} \times \overline{AS}|$. Найдем векторное произведение
$$\overline{AB} \times \overline{AS} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \end{vmatrix} \Rightarrow \overline{AB} \times \overline{AS} = -8\boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k},$$
следовательно, $S = \frac{1}{2}\sqrt{(-8)^2 + 6^2 + (-2)^2} = \sqrt{4^2 + 3^2 + 1^2} \Rightarrow S = \sqrt{26}$.

Но объем треугольной пирамиды можно найти и по формуле
$$V = \frac{1}{3}S \cdot h \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{1}{3}\sqrt{26} \cdot h \Rightarrow h = \frac{2}{\sqrt{26}} \Rightarrow h = \frac{1}{13}\sqrt{26}.$$

Пример 1.22. Доказать, что точки $A(2; 3; -1)$, $B(1; 2; 5)$, $C(4; 3; -3)$, $D(3; 2; 3)$ принадлежат одной плоскости.

Решение. Найдем векторы $\overline{AB} = (-1; -1; 6)$, $\overline{AC} = (2; 0; -2)$, $\overline{AD} = (1; -1; 4)$. Точки принадлежат одной плоскости тогда и только тогда, когда векторы $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ компланарны. Вычислим смешанное произведение этих векторов:
$$\overline{AB} \cdot (\overline{AC} \times \overline{AD}) = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 6 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-2) + (8 + 2) + 6 \cdot (-2) \Rightarrow \overline{AB} \cdot (\overline{AC} \times \overline{AD}) = 2 + 10 - 12 = 0.$$

Следовательно, векторы $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ – компланарны, следовательно точки A, B, C, D принадлежат одной плоскости.

Контрольное задание 5

1.60. Найти объем параллелепипеда, построенного на векторах $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{m} + \boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{b} = 2\boldsymbol{p} - \boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{p} + 2\boldsymbol{n} + 3\boldsymbol{m}$.

1.61. Треугольная пирамида задана радиусами-векторами своих вершин $\boldsymbol{r}_A = (0; 1; 2)$, $\boldsymbol{r}_B = (1; 3; 1)$, $\boldsymbol{r}_C = (2; -2; 0)$ и $\boldsymbol{r}_S = (-4; -1; 3)$. Определить объем пирамиды и высоту, опущенную на грань ASB.

1.62. Показать, что точки $A(1; -3; 2)$, $B(-1; -2; 3)$, $C(2; -5; 5)$ и $D(15; -16; 9)$ лежат в одной плоскости.

1.63. В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит параллелограмм $ABCD$, построенный на векторах $\overline{AB} = (-3; 3; -4)$ и $\overline{AD} = (0; -5; 1)$. Задано боковое ребро $\overline{DS} = (3; 2; 1)$ и точка F делит сторону BS в отношении 1:2. Вычислить объем пирамиды $ABDF$.

1.64. В ΔABC заданы вершины $A(2; 1; -1)$, $B(3; 2; -3)$, $C(1; -1; 2)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{p}$, коллинеарного высоте треугольника, опущенной на сторону AC, если вектор $\boldsymbol{p}$ образует тупой угол с осью Oy и $|\boldsymbol{p}| = 2\sqrt{42}$.

1.65. Вычислить объем треугольной пирамиды с вершинами $A(3;0;2)$, $B(1;-1;3)$, $C(2;1;0)$ и $S(1;2;1)$ и ее высоту, опущенную на грань ABC.

1.66. Доказать, что векторы $\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{i} + \boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$ линейно зависимы. Разложить вектор $\boldsymbol{c}$ по векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

Задачи для самостоятельной работы 5

1.67. Вычислить объем тетраэдра, построенного на векторах $\boldsymbol{a} = (1;-2;3)$, $\boldsymbol{b} = (2;3;4)$, $\boldsymbol{c} = (-1;-12;1)$.

1.68. Вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{n} = 2\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$.

1.69. Дана пирамида с вершинами $A(3;1;2)$, $B(-1;4;1)$, $C(0;3;3)$ и $D(2;0;4)$. Найти угол между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{DC}$, объем пирамиды и высоту, опущенную на грань ACD.

1.70. Объем тетраэдра равен 3. Три его вершины находятся в точках $A(1;-2;1)$, $B(2;-1;3)$, $C(3;1;2)$. Найти координаты четвертой вершины D, если известно, что она лежит на оси Oz.

1.71. Параллелепипед построен на векторах $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = -3\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$. Найти длину его высоты, опущенной на грань, построенную на векторах $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{c}$.

1.72. Найти смешанное произведение $\boldsymbol{mnp}$, если векторы $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{p}$ образуют правую тройку и $|\boldsymbol{m}| = 2$, $|\boldsymbol{n}| = 1$, $|\boldsymbol{p}| = \sqrt{3}$, $\angle(\boldsymbol{n},\boldsymbol{p}) = \dfrac{\pi}{3}$, и вектор $\boldsymbol{m}$ ортогонален векторам $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{p}$.

1.73. Вычислить $\boldsymbol{i}\cdot(2\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}) + 3\boldsymbol{j}\cdot(\boldsymbol{i}\times 2\boldsymbol{k}) + \boldsymbol{k}\cdot(2\boldsymbol{i}\times 3\boldsymbol{j})$.

1.74. Определить, какой тройкой векторов (правой или левой) являются векторы $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = 5\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$.

Глава 2. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

2.1. Плоскость в пространстве

Плоскость в декартовой прямоугольной системе координат $Oxyz$ задается различными уравнениями.

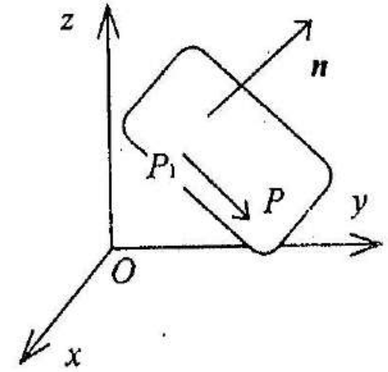

Рис. 14

В векторной форме уравнение плоскости, проходящей через данную точку $P_1(x_1;y_1;z_1)$ и перпендикулярной данному вектору $\boldsymbol{n} = (A;B;C)$, имеет вид

$$\boldsymbol{n}\cdot\overline{P_1P} = 0, \tag{2.1}$$

где переменная точка $P(x;y;z)$ принадлежит плоскости (рис. 14).

В координатной форме уравнение этой же плоскости имеет вид:

$$A(x-x_1) + B(y-y_1) + C(z-z_1) = 0. \tag{2.2}$$

Преобразовав уравнение (2.2), получим общее уравнение плоскости:

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{2.3}$$

где вектор $\boldsymbol{n} = (A;B;C)$ является вектором нормали к плоскости.

Если плоскость не проходит через начало координат ($D \neq 0$), то уравнение плоскости в отрезках имеет вид

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \tag{2.4}$$

где a, b, c – величины отрезков, отсекаемых плоскостью на координатных осях Ox, Oy, Oz соответственно.

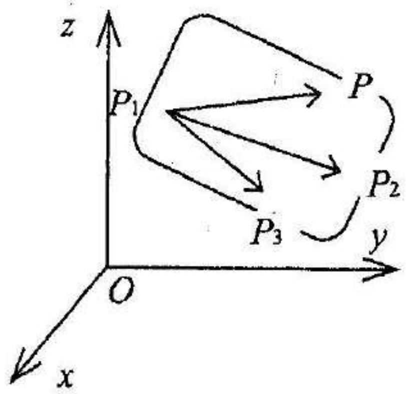

Рис. 15

В векторной форме уравнение плоскости, проходящей через три данные точки $P_1(x_1; y_1; z_1)$, $P_2(x_2; y_2; z_2)$, $P_3(x_3; y_3; z_3)$, не лежащие на одной прямой, имеет вид

$$\overline{P_1P} \cdot (\overline{P_1P_2} \times \overline{P_1P_3}) = 0, \tag{2.5}$$

где переменная точка $P(x; y; z)$ принадлежит плоскости (рис. 15).

В координатной форме уравнение этой же плоскости имеет вид

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{2.6}$$

Косинус угла между двумя плоскостями

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$
$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

где $\dfrac{A_1}{A_2} \neq \dfrac{B_1}{B_2} \neq \dfrac{C_1}{C_2}$, определяется косинусом угла между нормалями $\boldsymbol{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$ и $\boldsymbol{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$ к этим плоскостям:

$$\cos\varphi = \cos\angle(\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2) = \frac{\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1|\,|\boldsymbol{n}_2|}, \tag{2.7}$$

или в координатной форме:

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \tag{2.8}$$

Условие параллельности двух плоскостей ($\boldsymbol{n}_1 \parallel \boldsymbol{n}_2$):

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \tag{2.9}$$

Условие перпендикулярности двух плоскостей ($\boldsymbol{n}_1 \perp \boldsymbol{n}_2 \Rightarrow \Rightarrow \boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2 = 0$):

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \tag{2.10}$$

Расстояние от точки $P_0(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ вычисляем по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \tag{2.11}$$

Решение типовых задач

Пример 2.1. Точка $P_1(3; -2; 1)$ является основанием перпендикуляра, опущенного из точки $P_2(5; -5; -3)$ на плоскость. Составить уравнение плоскости.

Решение. Пусть переменная точка $P(x; y; z)$ принадлежит данной плоскости. Тогда вектор $\overline{P_1P} = (x - 3; y + 2; z - 1)$ принадлежит плоскости, а вектор $\overline{P_1P_2} = (2; -3; -4)$ перпендикулярен плоскости. Используя формулу (2.1), запишем в векторной форме уравнение плоскости: $\overline{P_1P_2} \cdot \overline{P_1P} = 0$, в координатной форме (см. (2.2)) уравнение этой же плоскости принимает вид $2(x - 3) - 3(y + 2) - 4(z - 1) = 0 \Rightarrow 2x - 3y - 4z - 8 = 0$.

Пример 2.2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(4;1;-3)$, $B(7;-1;2)$ параллельно оси Oy.

Решение. Пусть переменная точка $P(x;y;z)$ принадлежит данной плоскости. Решим задачу двумя способами.

I способ. Вектор $\overline{AP} = (x-4;y-1;z+3)$ принадлежит плоскости. Находим координаты вектора $\overline{AB} = (3;-2;5)$ и орта $\boldsymbol{j} = (0;1;0)$. Вектор нормали к плоскости найдем по формуле

$$\boldsymbol{n} = \overline{AB} \times \boldsymbol{j} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 3 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{n} = -5\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{k}.$$

Используя формулу (2.2), запишем уравнение плоскости:

$$-5(x-4) + 3(z+3) = 0 \Rightarrow 5x - 3z - 29 = 0.$$

II способ. Векторы $\overline{AP} = (x-4;y-1;z+3)$, $\overline{AB} = (3;-2;5)$ и орт $\boldsymbol{j} = (0;1;0)$ являются компланарными, следовательно, их смешанное произведение равно нулю. Запишем в векторной форме уравнение плоскости: $\overline{AP} \cdot (\overline{AB} \times \boldsymbol{j}) = 0$. Тогда в координатной форме уравнение плоскости имеет вид

$$\begin{vmatrix} x-4 & y-1 & z+3 \\ 3 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -5(x-4) + 3(z+3) = 0 \Rightarrow 5x - 3z - 29 = 0.$$

Пример 2.3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $P_1(5;-2;0)$ перпендикулярно к плоскостям $7x-2y-5=0$ и $5x-2y-z-7=0$.

Решение. Пусть переменная точка $P(x;y;z)$ принадлежит искомой плоскости. Вектор $\overline{P_1P} = (x-5;y+2;z)$ и векторы нормалей $\boldsymbol{n}_1 = (7;-2;0)$ и $\boldsymbol{n}_2 = (5;-2;-1)$ заданных плоскостей компланарны, следовательно, их смешанное произведение равно нулю. Запишем в векторной форме уравнение плоскости:

$\overline{P_1P} \cdot (\boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2) = 0$. Тогда в координатной форме уравнение плоскости имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x-5 & y+2 & z \\ 7 & -2 & 0 \\ 5 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(x-5) + 7(y+2) - 4z = 0 \Rightarrow 2x + 7y - 4z + 4 = 0.$$

Пример 2.4. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $P_1(-1;3;2)$, $P_2(1;3;1)$ перпендикулярно к плоскости $5x+3y-2z-9=0$.

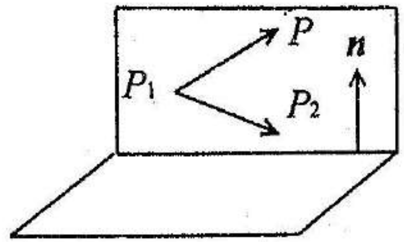

Рис. 16

Решение. Пусть переменная точка $P(x;y;z)$ принадлежит искомой плоскости. Векторы $\overline{P_1P} = (x+1;y-3;z-2)$, $\overline{P_1P_2} = (2;0;-1)$ и $\boldsymbol{n} = (5;3;-2)$ (вектор нормали заданной плоскости) компланарны (рис. 16). Записывая условие компланарности этих векторов, получим в векторной форме уранение плоскости: $\overline{P_1P} \cdot (\overline{F_1P_2} \times \boldsymbol{n}) = 0$. Запишем в координатной форме уравнение плоскости:

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-3 & z-2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 5 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3(x+1) - (y-3) + 6(z-2) = 0 \Rightarrow 3x - y + 6z - 6 = 0.$$

Пример 2.5. Найти расстояние от точки $P_0(2;-1;-2)$ до плоскости, проходящей через точки $P_1(2;1;-3)$, $P_2(5;-1;-2)$, $P_3(1;2;-1)$.

Решение. Пусть переменная точка $P(x;y;z)$ принадлежит искомой плоскости. Векторы $\overline{P_1P} = (x-2;y-1;z+3)$, $\overline{P_1P_2} = (3;-2;1)$, $\overline{P_1P_3} = (-1;1;2)$ являются компланарными. Используя формулу (2.6), запишем в координатной форме уравнение плоскости:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z+3 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -5(x-2) - 7(y-1) + (z+3) = 0 \Rightarrow 5x + 7y - z - 20 = 0.$$

По формуле (2.11) найдем расстояние от точки $P_0(2;-1;-2)$ до плоскости $5x+7y-z-20=0$:

$$d = \frac{|5\cdot 2 + 7\cdot(-1) - 1\cdot(-2) - 20|}{\sqrt{5^2+7^2+(-1)^2}} \Rightarrow d = \frac{15}{\sqrt{75}} \Rightarrow d = \sqrt{3}.$$

Пример 2.6. Убедиться, что плоскости $6x+4y-10z-18=0$ и $3x+2y-5z+10=0$ параллельны и найти расстояние между ними.

Решение. Заданные плоскости параллельны (2.9), так как $\frac{6}{3} = \frac{4}{2} = \frac{-10}{-5}$. Находим на плоскости $6x+4y-10z-18=0$ точку, положив $y=0$, $z=0$, тогда $6x-18=0 \Rightarrow x=3$. Найдем расстояние от точки $P_0(3;0;0)$ до плоскости $3x+2y-5z+10=0$ по формуле (2.11):

$$d = \frac{|3\cdot 3 + 2\cdot 0 - 5\cdot 0 + 10|}{\sqrt{3^2+2^2+(-5)^2}} \Rightarrow d = \frac{19}{\sqrt{38}} \Rightarrow d = \frac{1}{2}\sqrt{38}.$$

Пример 2.7. Найти косинус угла между плоскостями $5x-y+3z-2=0$ и $2x+6y-5z+1=0$.

Решение. Находим векторы нормалей $\boldsymbol{n}_1 = (5;-1;3)$, $\boldsymbol{n}_2 = (2;6;-5)$ к заданным плоскостям. Используя формулу (2.8), находим

$$\cos\varphi = \cos\angle(\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2) = \frac{5\cdot 2 + (-1)\cdot 6 + 3\cdot(-5)}{\sqrt{5^2+(-1)^2+3^2}\cdot\sqrt{2^2+6^2+(-5)^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\varphi = -\frac{11}{\sqrt{35}\cdot\sqrt{65}} \Rightarrow \cos\varphi = -\frac{11}{5\sqrt{91}}.$$

Если требуется найти острый угол между плоскостями, то $\cos\varphi = \frac{11}{5\sqrt{91}}$.

Контрольное задание 6

2.1. Составить уравнение плоскости, перпендикулярной вектору $\overline{AC}$ и проходящий через точку C, если $A(-3;5;-4)$, $C(-1;0;-1)$.

2.2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $P(0;1;3)$ параллельно плоскости $7x-y-3z+4=0$.

2.3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(2;1;-3)$ параллельно векторам $\boldsymbol{a} = (2;0;1)$ и $\boldsymbol{c} = (-1;-3;2)$.

2.4. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $P_1(4;0;3)$ и $P_2(2;1;4)$ перпендикулярно к плоскости $4x-7y-3z+5=0$.

2.5. Составить уравнение плоскости, проходящей через ось Oz и точку $C(4;5;-1)$.

2.6. Найти косинус угла между плоскостями $2x+2y+z+9=0$ и $3x-2y+z-3=0$.

2.7. Найти расстояние от точки $P(2;0;-1)$ до плоскости $3y-4z+11=0$.

2.8. Найти расстояние между параллельными плоскостями $3x-2y-z-13=0$ и $6x-4y-2z-19=0$.

2.9. Найти величины отрезков, отсекаемых на координатных осях плоскостью $2x-5y+3z-30=0$.

Задачи для самостоятельной работы 6

2.10. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $P_1(3;-2;5)$ и $P_2(1;-3;4)$ параллельно вектору $\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{i} - -2\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$.

2.11. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки $P_1(1;5;6)$, $P_2(2;3;1)$ и $P_3(3;-1;2)$.

2.12. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(-1;2;0)$ перпендикулярно плоскостям $x - y + 3z - 4 = 0$ и $2x + y - 5z + 7 = 0$.

2.13. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $P_1(2;-3;3)$ и $P_2(4;-2;5)$ и отсекающий на оси аппликат отрезок $c = 2$.

2.14. Найти косинус угла между плоскостями $4x + 2y - z - -7 = 0$ и $6x + 3z + 5 = 0$.

2.15. Найти расстояние между параллельными плоскостями $2x - y + z - 10 = 0$ и $4x - 2y + 2z - 15 = 0$.

2.16. Вычислить расстояние от точки $A(2;-1;1)$ до плоскости, отсекающей от осей координат отрезки $a = 2$, $b = -3$, $c = 1$.

2.2. Прямая в пространстве

Прямая в декартовой прямоугольной системе координат $Oxyz$ задается различными уравнениями.

В векторной форме уравнение прямой, проходящей через данную точку $P_1(x_1;y_1;z_1)$, параллельно вектору $\boldsymbol{s} = (m;n;p)$, имеет вид $\overline{P_1P} = t\boldsymbol{s}$, где переменная точка $P(x;y;z)$ принадлежит прямой и t – действительная скалярная величина.

В координатной форме канонические уравнения этой же прямой имеют вид

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p}. \qquad (2.12)$$

Вектор $\boldsymbol{s} = (m;n;p)$ называется направляющим вектором прямой.

Параметрические уравнения этой же прямой имеют вид

$$\begin{cases} x = mt + x_1 \\ y = nt + y_1 \\ z = pt + x_1. \end{cases} \qquad (2.13)$$

Канонические уравнения прямой, проходящей через две данные точки $P_1(x_1;y_1;z_1)$ и $P_2(x_2;y_2;z_2)$, имеют вид

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \qquad (2.14)$$

Прямая в пространстве может быть задана как линия пересечения двух плоскостей:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases} \qquad (2.15)$$

если $\dfrac{A_1}{A_2} \neq \dfrac{B_1}{B_2} \neq \dfrac{C_1}{C_2}$. Уравнения (2.15) называются общими уравнениями прямой.

Чтобы привести общие уравнения прямой (2.15) к каноническому виду, находим направляющий вектор $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2$, где $\boldsymbol{n}_1 = (A_1;B_1;C_1)$, $\boldsymbol{n}_2 = (A_2;B_2;C_2)$ – векторы нормалей к данным плоскостям, и точку, принадлежащую прямой. Для этого удобно одну из переменных в системе (2.15) задать равной нулю (например, $z = 0$), а две другие $x = x_1$, $y = y_1$ находим, решая полученную из (2.15) систему. Запишем канонические уравнения прямой:

$$\frac{x - x_1}{B_1C_2 - B_2C_1} = \frac{y - y_1}{A_2C_1 - A_1C_2} = \frac{z}{A_1B_2 - A_2B_1}. \qquad (2.16)$$

Взаимное расположение двух прямых в пространстве

Пусть заданы две прямые своими каноническими уравнениями

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1},$$
$$\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}, \qquad (2.17)$$

где $s_1=(m_1;n_1;p_1)$, $s_2=(m_2;n_2;p_2)$ – направляющие векторы прямых, и они не параллельны $\left(\frac{m_1}{m_2}\neq\frac{n_1}{n_2}\neq\frac{p_1}{p_2}\right)$, точки $P_1(x_1;y_1;z_1)$, $P_2(x_2;y_2;z_2)$ принадлежат прямым. Косинус угла между прямыми определяем по формуле $\cos\varphi=\cos\angle(s_1,s_2)=$ $=\frac{s_1\cdot s_2}{|s_1||s_2|}$.

В координатной форме косинус угла между прямыми определяем по формуле

$$\cos\varphi=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}. \qquad (2.18)$$

Условие параллельности двух прямых ($s_1\parallel s_2$):

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}. \qquad (2.19)$$

Условие перпендикулярности двух прямых ($s_1\perp s_2\Rightarrow$ $\Rightarrow s_1\cdot s_2=0$):

$$m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0. \qquad (2.20)$$

Определение 2.1. Две прямые называются компланарными, если они принадлежат одной плоскости или параллельным плоскостям.

Прямые компланарны, если:

1) они параллельны: $\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}$ или

2) пересекаются:

$$\frac{m_1}{m_2}\neq\frac{n_1}{n_2}\neq\frac{p_1}{p}\text{ и }\begin{vmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ m_1 & n_1 & p_1\\ m_2 & n_2 & p_2\end{vmatrix}=0. \qquad (2.21)$$

Если прямые скрещиваются, то выполняются условия

$$\frac{m_1}{m_2}\neq\frac{n_1}{n_2}\neq\frac{p_1}{p_2}\text{ и }\begin{vmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ m_1 & n_1 & p_1\\ m_2 & n_2 & p_2\end{vmatrix}\neq 0. \qquad (2.22)$$

Если прямые (2.17) скрещиваются, то расстояние между ними равно расстоянию между параллельными плоскостями, проведенными через заданные прямые. Вектор нормали n этих плоскостей перпендикулярен векторам s_1 и s_2, следовательно, $n=s_1\times s_2$. Так как $P_1(x_1;y_1;z_1)$ и $P_2(x_2;y_2;z_2)$ – точки, принадлежащие прямым, расстояние между скрещивающимися прямыми вычисляем по формуле

$$d=|\text{пр}_{n}\overline{P_1P_2}|\Rightarrow d=\frac{|n\cdot\overline{P_1P_2}|}{|n|}. \qquad (2.23)$$

Решение типовых задач

Пример 2.8. Составить канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $P_1(2;-3;4)$ параллельно прямой $\frac{x}{3}=\frac{y-1}{5}=\frac{z+3}{-2}$.

Решение. Так как направляющий вектор $s=(3;5;-2)$ данной прямой является направляющим вектором искомой прямой, используя формулы (2.12), составим канонические уравнения искомой прямой: $\frac{x-2}{3}=\frac{y+3}{5}=\frac{z-4}{-2}$.

Приравнивая эти выражения параметру t, запишем параметрические уравнения (2.13):

$$\begin{cases}x=3t+2\\ y=5t-3\\ z=-2t+4.\end{cases}$$

Пример 2.9. Составить канонические и общие уравнения прямой, проходящей через точку $A(3;-5;1)$ параллельно оси Oz.

Решение. Направляющий вектор прямой $\boldsymbol{s}$ равен орту $\boldsymbol{k}$ оси Oz: $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{k}=(0;0;1)$, тогда канонические уравнения прямой имеют вид $\frac{x-3}{0}=\frac{y+5}{0}=\frac{z-1}{1}$. Запишем два уравнения: $\begin{cases}1\cdot(x-3)=0\cdot(z-1)\\1\cdot(y+5)=0\cdot(z-1).\end{cases}$ Тогда общие уравнения прямой имеют вид $\begin{cases}x-3=0\\y+5=0.\end{cases}$

Пример 2.10. В плоскости yOz найти прямую, проходящую через точку $P_1(0;2;-5)$ и перпендикулярную прямой $\frac{x+2}{5}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+9}{7}$.

Решение. Так как прямая принадлежит плоскости yOz, то направляющий вектор прямой $\boldsymbol{s}_1\perp\boldsymbol{i}=(1;0;0)$ и $\boldsymbol{s}_1\perp\boldsymbol{s}=$ $=(5;2;7)$. Находим $\boldsymbol{s}_1=\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{s}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&0&0\\5&2&7\end{vmatrix}\Rightarrow\boldsymbol{s}_1=0\boldsymbol{i}-7\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$.

Составим канонические уравнения (2.12) прямой, проходящей через точку $P_1(0;2;-5)$: $\frac{x}{0}=\frac{y-2}{-7}=\frac{z+5}{2}$.

Пример 2.11. Составить канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через точки $P_1(4;3;-1)$ и $P_2(2;-3;6)$.

Решение. Используя формулы (2.14), запишем: $\frac{x-4}{2-4}=$ $=\frac{y-3}{-3-3}=\frac{z+1}{6+1}$, и канонические уравнения прямой имеют вид $\frac{x-4}{-2}=\frac{y-3}{-6}=\frac{z+1}{7}$.

Запишем параметрические уравнения: $\begin{cases}x=-2t+4\\y=-6t+3\\z=7t-1.\end{cases}$

Пример 2.12. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой

$$\begin{cases}3x+2y-z-1=0\\x-4y+2z+9=0.\end{cases}$$

Решение. Запишем векторы нормалей к данным плоскостям: $\boldsymbol{n}_1=(3;2;-1)$, $\boldsymbol{n}_2=(1;-4;2)$. Находим направляющий вектор прямой: $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\3&2&-1\\1&-4&2\end{vmatrix}\Rightarrow\boldsymbol{s}=0\boldsymbol{i}-7\boldsymbol{j}-14\boldsymbol{k}$.

За направляющий вектор $\boldsymbol{s}_1$ прямой можно взять вектор, коллинеарный найденному: $\boldsymbol{s}_1=(0;1;2)$. Найдем точку, принадлежащую прямой, положив $y=0$. Решая систему

$$\begin{cases}3x-z-1=0\\x+2z+9=0\\y=0,\end{cases}$$

находим точку $P_1(-1;0;-4)$. Составим канонические уравнения прямой $\frac{x+1}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z+4}{2}$.

Пример 2.13. Найти косинус угла между прямыми

$$\frac{x-5}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z}{3}\text{ и }\begin{cases}5x+3y-z-7=0\\2x+y-2z+1=0.\end{cases}$$

Решение. Запишем направляющий вектор $\boldsymbol{s}_1=(2;1;3)$ первой прямой. Запишем векторы нормалей к плоскостям $\boldsymbol{n}_1=$ $=(5;3;-1)$ и $\boldsymbol{n}_2=(2;1;-2)$ и найдем направляющий вектор второй прямой: $\boldsymbol{s}_2=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\5&3&-1\\2&1&-2\end{vmatrix}\Rightarrow\boldsymbol{s}_2=-5\boldsymbol{i}+8\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$.

Используя формулу (2.18), найдем косинус угла между прямыми: $\cos\varphi=\cos\angle(\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2)\Rightarrow\cos\varphi=\frac{2\cdot(-5)+1\cdot8+3\cdot(-1)}{\sqrt{4+1+9}\cdot\sqrt{25+64+1}}\Rightarrow$

$\Rightarrow\cos\varphi=-\frac{5}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{90}}\Rightarrow\cos\varphi=-\frac{1}{6}\sqrt{\frac{5}{7}}$.

Пример 2.14. Проверить, скрещиваются ли данные прямые $\frac{x+3}{4}=\frac{y}{-3}=\frac{z-2}{5}$ и $\frac{x}{1}=\frac{y+1}{0}=\frac{z-4}{2}$, и найти расстояние между ними.

Решение. Нам известны направляющие векторы $\boldsymbol{s}_1 = (4;-3;5)$ и $\boldsymbol{s}_2=(1;0;2)$ данных прямых и точки $P_1(-3;0;2)$, $P_2(0;-1;4)$, принадлежащие этим прямым; тогда вектор $\overline{P_1P_2}=(3;-1;2)$. Проверим выполнение условий (2.22): $\frac{4}{1} \neq \frac{-3}{0} \neq \frac{5}{2}$ и $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1(-5+6)+2(-9+4) = -9 \neq 0$, следовательно, данные прямые скрещиваются.

Расстояние между скрещивающимися прямыми равно расстоянию между параллельными плоскостями, проведенными через данные прямые. Вектор нормали $\boldsymbol{n}$ этих плоскостей перпендикулярен векторам $\boldsymbol{s}_1$ и $\boldsymbol{s}_2$, следовательно, $\boldsymbol{n} \parallel (\boldsymbol{s}_1 \times \boldsymbol{s}_2)$. Находим $\boldsymbol{s}_1 \times \boldsymbol{s}_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 4 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -6\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$, следовательно, $\boldsymbol{n} = -2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$. Используя формулу (2.33), находим расстояние $d = |\text{пр}_{\boldsymbol{n}} \overline{P_1P_2}| \Rightarrow d = \frac{|\boldsymbol{n} \cdot \overline{P_1P_2}|}{|\boldsymbol{n}|} \Rightarrow d = \frac{|(-2)\cdot 3 - 1\cdot(-1) + 1 \cdot 2|}{\sqrt{4+1+1}} \Rightarrow$ $\Rightarrow d = \frac{|-3|}{\sqrt{6}} \Rightarrow d = \frac{1}{2}\sqrt{6}$ между прямыми.

Контрольное задание 7

2.17. Составить канонические и общие уравнения прямой, проходящей через точку $P(2;3;-4)$ параллельно вектору $\boldsymbol{a} = (-4;0;7)$.

2.18. Составить канонические и общие уравнения прямой, проходящей через точку $P(6;2;-3)$ параллельно прямой $\begin{cases} x = 2t+2 \\ y = 3t+1 \\ z = -t-4. \end{cases}$

2.19. Составить канонические и параметрические уравнения прямых, проходящих через точку $A(2;-3;0)$, если направляющие вектора прямых образуют с координатными осями Ox и Oy углы $\alpha = -\frac{\pi}{4}$, $\beta = \frac{2}{3}\pi$.

2.20. Составить канонические, параметрические и общие уравнения прямой, проходящей через точки $A(5;7;-3)$ и $B(2;5;0)$.

2.21. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой $\begin{cases} 2x+5y+z+7=0 \\ 4x+3y-z+5=0. \end{cases}$

2.22. В плоскости xOy найти прямую, проходящую через точку $P(4;-5;0)$ перпендикулярно прямой $\frac{x-1}{3}=\frac{y+3}{8}=\frac{z-4}{-2}$.

2.23. Определить острый угол между прямыми $\begin{cases} x=-5t+3 \\ y=t-1 \\ z=t-7 \end{cases}$ и $\frac{x+5}{3}=\frac{y-4}{2}=\frac{z-3}{6}$.

2.24. Проверить, пересекаются ли прямые $\begin{cases} 2x-y+z-1=0 \\ y+2z-3=0 \end{cases}$ и $\frac{x-5}{3}=\frac{y-7}{1}=\frac{z+2}{0}$.

Задачи для самостоятельной работы 7

2.25. Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через точки $A(4;-3;8)$ и $C(6;2;5)$.

2.26. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой $\begin{cases} 2x-3y-z+6=0 \\ x-6y-3z-2=0. \end{cases}$

2.27. Составить канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $A(2;-1;9)$ параллельно прямой $\begin{cases} 2x+y+1=0 \\ 5x+z-1=0. \end{cases}$

2.28. Доказать параллельность прямых $\begin{cases} x = 4t + 1 \\ y = -10t - 2 \\ z = -6t + 9 \end{cases}$ и

$$\begin{cases} 2x - y + 3z - 8 = 0 \\ x + y - z + 7 = 0. \end{cases}$$

2.29. Проверить, скрещиваются ли прямые $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+1}{2}$ и $\begin{cases} x = t + 1 \\ y = -t - 3 \\ z = 3t + 2. \end{cases}$ Найти расстояние между ними.

2.30. Доказать перпендикулярность прямых $\dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y+2}{-4} = \dfrac{z-8}{-6}$ и $\begin{cases} x - 2y + 8 = 0 \\ y + 3z - 11 = 0. \end{cases}$

2.31. Определить косинус угла между прямыми

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 3t - 5 \\ z = -4t + 7 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x - 3z + 9 = 0 \\ y + 2z - 6 = 0. \end{cases}$$

2.3. Прямая и плоскость в пространстве

Пусть в пространстве заданы канонические уравнения прямой l и общее уравнение плоскости π:

$$l: \frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p}, \quad \boldsymbol{s} = (m; n; p), \qquad (2.24)$$

$$\pi: Ax + By + Cz + D = 0, \quad \boldsymbol{n} = (A; B; C). \qquad (2.25)$$

Определение 2.2. Углом между прямой и плоскостью называется меньший из углов между прямой и ее проекцией на плоскость (рис. 17).

Синус угла между прямой и плоскостью определяем по формуле

$$\sin\theta = \cos\angle(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{n}) = \frac{|\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{s}||\boldsymbol{n}|}.$$

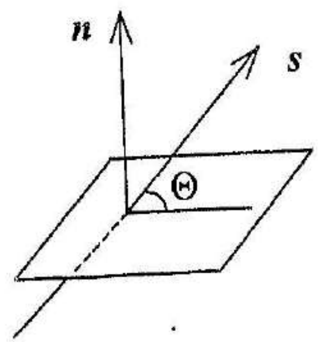

Рис. 17

В координатной форме синус угла между прямой и плоскостью определяем по формуле

$$\sin\theta = \frac{|mA + nB + pC|}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \qquad (2.26)$$

Для определения точки пересечения прямой (2.24) с плоскостью (2.25) решим систему уравнений плоскости и прямой, записав параметрические уравнения прямой:

$$\begin{cases} x = mt + x_1 \\ y = nt + y_1 \\ z = pt + z_1 \\ Ax + By + Cz + D = 0. \end{cases}$$

Подставим x, y, z в уравнение плоскости и найдем параметр t. Найденное значение $t = -\dfrac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{mA + nB + pC}$ подставляем в параметрические уравнения прямой и вычисляем координаты точки пересечения. Если $mA + nB + pC \neq 0$, то прямая пересекает плоскость в единственной точке.

Условие параллельности прямой и плоскости:

$$mA + nB + pC = 0 \text{ и } Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D \neq 0. \qquad (2.27)$$

Условие ортогональности прямой и плоскости:

$$\frac{m}{A} = \frac{n}{B} = \frac{p}{C}. \tag{2.28}$$

Условие принадлежности прямой плоскости

$$mA + nB + pC = 0 \text{ и } Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0. \tag{2.29}$$

Определение 2.3. Пучком плоскостей называется множество плоскостей, проходящих через одну и ту же прямую.

Если плоскости проходят через прямую, заданную общими уравнениями

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases}$$

то уравнение пучка плоскостей имеет вид

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0, \tag{2.30}$$

где λ – действительный параметр. При различных значениях параметра λ получаем различные уравнения плоскостей, проходящих через заданную прямую.

Решение типовых задач

Пример 2.15. Найти точку пересечения прямой $\frac{x+2}{3} = \frac{y+3}{1} = \frac{z}{2}$ и плоскости $x - 3y + 4z + 9 = 0$.

Решение. Записав параметрические уравнения прямой, решим систему уравнений прямой и плоскости:

$$\begin{cases} x = 3t - 2 \\ y = t - 3 \\ z = 2t \\ x - 3y + 4z + 9 = 0. \end{cases}$$

Подставим x, y, z в уравнение плоскости $3t - 2 - 3 \cdot (t - 3) + 8t + 9 = 0 \Rightarrow 8t + 16 = 0 \Rightarrow t = -2$. Подставив найденное значение $t = -2$ в параметрические уравнения прямой, найдем точку $P_1(-8; -5; -4)$ пересечения прямой и плоскости.

Пример 2.16. Найти проекцию точки $P(-1; 3; 2)$ на плоскость $2x + 4y - 5z + 45 = 0$.

Решение. Проекцией точки на плоскость является основание перпендикуляра, опущенного из точки P на плоскость. Составим канонические уравнения прямой, перпендикулярной плоскости ($\boldsymbol{s} = \boldsymbol{n} = (2; 4; -5)$) и проходящей через точку $P(-1; 3; 2)$: $\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-2}{-5}$. Проекцией точки P на плоскость является точка пересечения прямой и плоскости. Записав параметрические уравнения прямой, решим систему уравнений прямой и плоскости: $\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = 4t + 3 \\ z = -5t + 2 \\ 2x + 4y - 5z + 45 = 0. \end{cases}$

Подставляя x, y, z в уравнение плоскости $2(2t - 1) + 4(4t + 3) - 5(-5t + 2) + 45 = 0 \Rightarrow 45t + 45 = 0$, находим $t = -1$. Подставив найденное значение $t = -1$ в параметрические уравнения прямой, найдем точку $P_1(-3; -1; 7)$, являющуюся проекцией точки P на плоскость.

Пример 2.17. Найти синус угла между прямой $\begin{cases} 3x - y + 7 = 0 \\ x - 2z - 5 = 0 \end{cases}$ и плоскостью $x - 2y + 2z + 3 = 0$.

Решение. Запишем векторы нормалей $\boldsymbol{n}_1 = (3; -1; 0)$, $\boldsymbol{n}_2 = (1; 0; -2)$ к заданным плоскостям. Найдем направляющий вектор прямой:

$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{s} = 2\boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}.$$

Запишем вектор нормали $\boldsymbol{n} = (1; -2; 2)$ к заданной плоскости. Используя формулу (2.26), вычислим синус угла между прямой и плоскостью:

$$\sin\theta = \cos\angle(s,n) = \frac{|2\cdot 1 + 6\cdot(-2) + 1\cdot 2|}{\sqrt{2^2+6^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}} = \frac{8}{3\sqrt{41}}.$$

Пример 2.18. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $P_1(5;2;-2)$ и прямую $\dfrac{x-3}{5} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-2}{-3}$.

Решение. Направляющий вектор прямой $s = (5;2;-3)$ и точка $P_2(3;-1;2)$ принадлежат искомой плоскости. Возьмем на плоскости переменную точку $P(x;y;z)$. Тогда векторы $\overline{P_2P} = (x-3; y+1; z-2)$, $s = (5;2;-3)$ и $\overline{P_2P_1} = (2;3;-4)$ принадлежат плоскости (рис. 18). Записав условие компланарности этих векторов:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z-2 \\ 5 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (x-3) + 14(y+1) + 11(z-2) = 0,$$

найдем общее уравнение плоскости: $x + 14y + 11z - 11 = 0$.

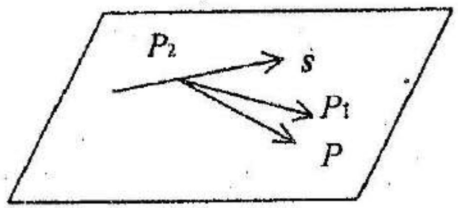

Рис. 18

Пример 2.19. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $P_1(1;-2;-3)$ и прямую $\begin{cases} 3x - y + 2z + 9 = 0 \\ x + z - 2 = 0. \end{cases}$

Решение. Составим уравнение пучка плоскостей (2.30), проходящих через данную прямую: $3x-y+2z+9+\lambda(x+z-2) = 0$. Так как плоскость проходит через точку $P_1(1;-2;-3)$, подставим координаты точки в уравнение пучка плоскостей: $3\cdot 1 - (-2) + 2\cdot(-3) + 9 + \lambda(1-3-2) = 0 \Rightarrow 8 - 4\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 2$.

Найдем уравнение плоскости: $3x - y + 2z + 9 + 2(x + z - 2) = 0 \Rightarrow 5x - y + 4z + 5 = 0$.

Пример 2.20. Составить уравнение плоскости, проходящей через параллельные прямые $\dfrac{x+3}{2} = \dfrac{y-1}{0} = \dfrac{z-2}{5}$ и $\dfrac{x+5}{2} = \dfrac{y-2}{0} = \dfrac{z}{5}$.

Решение. Направляющий вектор прямых $s = (2;0;5)$ и точки $P_1(-3;1;2)$, $P_2(-5;2;0)$ принадлежат плоскости. Возьмем на плоскости переменную точку $P(x;y;z)$. Тогда векторы $\overline{P_1P} = (x+3; y-1; z-2)$, $s = (2;0;5)$ и $\overline{P_1P_2} = (-2;1-2)$ принадлежат плоскости (рис. 19). Записав условие компланарности этих векторов: $\begin{vmatrix} x+3 & y-1 & z-2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 5(x+3)+6(y-1)-2(z-2) = 0$, найдем общее уравнение плоскости $5x + 6y - 2z + 13 = 0$.

Пример 2.21. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y-5}{1} = \dfrac{z+4}{-7}$ перпендикулярно к плоскости $3x + 2y - 5z - 3 = 0$.

Решение. Направляющий вектор прямой $s = (4;1;-7)$, точка $P_1(2;5;-4)$ и вектор нормали к заданной плоскости $n = (3;2;-5)$ принадлежат искомой плоскости. Возьмем на плоскости переменную точку $P(x;y;z)$. Векторы $\overline{P_1P} = (x-2; y-5; z+4)$, s и n принадлежат плоскости (рис. 20). Записав

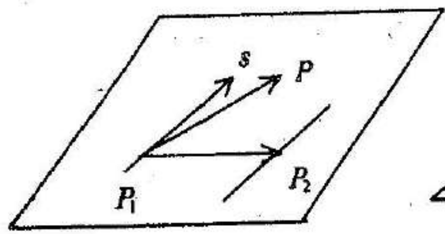

Рис. 19

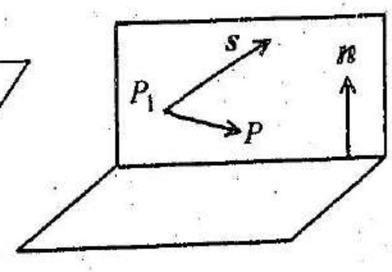

Рис. 20

условие компланарности этих векторов

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-5 & z+4 \\ 4 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 9(x-2)-(y-5)+5(z+4)=0,$$

найдем общее уравнение плоскости $9x - y + 5z + 7 = 0$.

Пример 2.22. Найти координаты точки, симметричной с точкой $P_1(-1;2;1)$ относительно плоскости $x + 3y - z - 26 = 0$.

Решение. Точка P_2, симметричная с точкой $P_1(-1;2;1)$ относительно плоскости, лежит на прямой, перпендикулярной плоскости и проходящей через точку P_1 (рис. 21). Составим

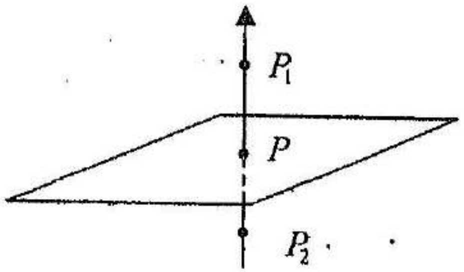

Рис. 21

канонические уравнения этой прямой ($s = n = (1;3;-1)$) : $\frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{-1}$. Записав параметрические уравнения прямой, найдем точку P пересечения прямой и плоскости, решив систему

$$\begin{cases} x = t-1 \\ y = 3t+2 \\ z = -t+1 \\ x+3y-z-26=0, \end{cases}$$

тогда $t-1+3(3t+2)-(-t+1)-26=0 \Rightarrow 11t-22=0 \Rightarrow t=2$ и $P(1;8;-1)$. Точка $P(1;8;-1)$ является серединой отрезка P_1P_2,

следовательно, $1 = \frac{-1+x_2}{2}$, $8 = \frac{2+y_2}{2}$, $-1 = \frac{1+z_2}{2} \Rightarrow x_2 = 3$, $y_2 = 14$, $z_2 = -3$, тогда искомая точка $P_2(3;14;-3)$.

Пример 2.23. Вычислить расстояние между параллельными прямыми

$$\frac{x+3}{3} = \frac{y}{-7} = \frac{z-4}{1} \text{ и } \frac{x}{3} = \frac{y+8}{-7} = \frac{z+2}{1}.$$

Решение. Составим уравнение плоскости, проходящей через точку $P_1(-3;0;4)$, принадлежащую первой прямой и перпендикулярной заданным прямым ($n = s = (3;-7;1)$) : $3(x+3) - 7y + z - 4 = 0 \Rightarrow 3x - 7y + z + 5 = 0$. Записав параметрические уравнения второй прямой, найдем точку P пересечения второй прямой и плоскости $\begin{cases} x = 3t \\ y = -7t-8 \\ z = t-2 \\ 3x-7y+z+5=0. \end{cases}$

Подставим x, y, z в уравнение плоскости $3\cdot 3t - 7(-7t - 8) + t - 2 + 5 = 0 \Rightarrow 59t + 59 = 0 \Rightarrow t = -1$. Подставляя найденное значение $t = -1$ в параметрические уравнения прямой, находим точку $P(-3;-1;-3)$. Найдем вектор $\overline{PP_1} = (0;1;7)$ и расстояние между параллельными прямыми: $|\overline{PP_1}| = \sqrt{1+49} \Rightarrow$ $\Rightarrow |\overline{PP_1}| = 5\sqrt{2}$.

Пример 2.24. Найти кратчайшее расстояние между прямыми $\frac{x+5}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{4}$ и $\frac{x-6}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-5}{3}$.

Решение. Данные прямые не параллельны, поэтому, записав условие компланарности трех векторов $\overline{P_1P} = (x+5; y+1; z)$, $s_1 = (1;3;4)$ и $s_2 = (2;1;3)$, составим уравнение плоскости, проходящей через первую прямую параллельно второй прямой:

$$\begin{vmatrix} x+5 & y+1 & z \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 5(x+5)+5(y+1)-5z=0 \Rightarrow x+y-z+6=0.$$

Найдем расстояние от точки $P_2(6;0;5)$, принадлежащей второй прямой, до плоскости: $d = \frac{|6-5+6|}{\sqrt{1+1+1}} \Rightarrow d = \frac{7}{\sqrt{3}}$.

2.32. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $P(-2;1;-3)$ параллельно прямым $\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+2}{2}$ и $\begin{cases} x = t+3 \\ y = 2t-1 \\ z = 2. \end{cases}$

2.33. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $C(3;1;-2)$ и прямую $\begin{cases} x = 3t-1 \\ y = -2t+3 \\ z = t. \end{cases}$

2.34. Найти координаты проекции точки $P(-2;3;4)$ на прямую $\frac{x-4}{2}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z-8}{3}$.

2.35. Проверить, пересекаются ли прямые $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+2}{3}$ и $\frac{x+3}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z+4}{1}$, и составить уравнение плоскости, проходящей через них.

2.36. Составить уравнение плоскости, проходящей через две параллельные прямые $\frac{x+3}{-4}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-2}{-2}$ и $\frac{x-1}{-4}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-7}{-2}$.

2.37. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-2}{1}=\frac{y+4}{8}=\frac{z+1}{1}$ перпендикулярно к плоскости $x-3y-z+2=0$.

2.38. Найти расстояние между параллельными прямыми $\frac{x+1}{-1}=\frac{y+1}{5}=\frac{z-1}{3}$ и $\frac{x+2}{-1}=\frac{y-7}{5}=\frac{z+1}{3}$.

2.39. Составить уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $A(2;-1;5)$ на прямую $\frac{x-3}{6}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-3}{1}$.

2.40. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-3}{3}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z-2}{-1}$ параллельно прямой $\begin{cases} x = -t+1 \\ y = 2t+2 \\ z = 2t+3. \end{cases}$

2.41. Найти координаты точки, симметричной с точкой $P_1(2;-1;3)$ относительно прямой $\frac{x-7}{-3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{1}$.

2.42. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(2;3;1)$ и прямую $\begin{cases} x+y-z+1=0 \\ 2x-y+3z+2=0. \end{cases}$

2.43. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{1}=\frac{z+2}{4}$ перпендикулярно плоскости $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}+\frac{z}{1}=1$.

2.44. Найти синус угла между прямой $\frac{x-2}{8}=\frac{y-3}{0}=\frac{z+5}{3}$ и плоскостью $2x+5y-7z+3=0$.

2.45. Найти кратчайшее расстояние между двумя прямыми $\frac{x-2}{3}=\frac{y}{0}=\frac{z+1}{2}$ и $\frac{x-1}{4}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-8}{1}$.

2.46. Составить уравнение перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+2}{1}$.

Глава 3. ТИПОВОЙ РАСЧЕТ ПО ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЕ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Задача 1. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $\overline{AB}=\boldsymbol{a}$, $\overline{AD}=\boldsymbol{b}$, $\overline{AA}=\boldsymbol{c}$. Выразить через $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ вектор $\boldsymbol{q}$, конец которого является серединой ребра x.

Задача 2. Разложить вектор $\boldsymbol{a}$ по векторам $\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},\boldsymbol{r}$.

Задача 3. Найти косинус угла между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

Задача 4. Найти $\text{пр}_y x$.

Задача 5. Найти координаты единичного вектора n_0, перпендикулярного к плоскости $\triangle ABC$, построенного на векторах $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$.

Задача 6. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

Задача 7. Компланарны ли векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$?

Задача 8. Вычислить объем пирамиды с вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4, ее высоту, опущенную из вершины A_4 на грань $(A_1A_2A_3)$, площадь грани $(A_1A_2A_3)$.

Задача 9. Найти косинус острого угла между плоскостями α и β.

Задача 10. Задана пирамида $SABC$ координатами вершин:

а) составить уравнение плоскости $\triangle ABC$;

б) найти расстояние от вершины до плоскости $\triangle ABC$.

Задача 11. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 перпендикулярно плоскостям γ_1 и γ_2.

Задача 12. Составить уравнения сторон $\triangle A_1B_1C_1$, заданного координатами вершин.

Задача 13. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой l.

Задача 14. Найти проекцию точки M_0 на плоскость α.

Задача 15. Найти угол между прямой l и плоскостью β.

Ниже в таблице приведены условия задач 1 – 15 типового расчета по вариантам.

Таблица

Условие типового расчета

Номер варианта	Задача 1		Задача 2				Задача 3				
	q	x	a	p	q	r	a	b	$\lvert m\rvert$	$\lvert n\rvert$	$(\widehat{m,n})$
1	$\overline{AE}$	B_1C_1	(6;12;–1)	(1;3;0)	(2;-1;1)	(0;-1;2)	$2m+2n$	$m-2n$	1	1	$\frac{\pi}{3}$
2	$\overline{AE}$	D_1C_1	(-3;12;16)	(4;1;1)	(2;0;-3)	(-1;2;1)	$6m-3n$	$3m+2n$	3	5	$\frac{\pi}{3}$
3	$\overline{BE}$	D_1A_1	(0;3;-5)	(5;1;0)	(2;-1;3)	(1;0;-1)	$3m+n$	$7m-4n$	1	2	$\frac{\pi}{2}$
4	$\overline{BE}$	D_1C_1	(3;-3;4)	(1;0;2)	(0;1;1)	(2;-1;4)	$m-n$	$2m+4n$	1	1	$\frac{2\pi}{3}$
5	$\overline{CE}$	A_1D_1	(-1;7;-4)	(-1;2;1)	(2;0;3)	(1;1;-1)	$2m-n$	$m+n$	1	5	$\frac{\pi}{3}$
6	$\overline{CE}$	A_1B_1	(6;-1;7)	(1;-2;0)	(-1;1;3)	(1;0;4)	$4m+n$	$m-n$	3	$\sqrt{2}$	$\frac{\pi}{4}$
7	$\overline{DE}$	A_1B_1	(2;-1;11)	(1;1;0)	(0;1;-2)	(1;0;3)	$3m+2n$	$2m-n$	$\sqrt{2}$	4	$\frac{3\pi}{4}$
8	$\overline{DE}$	B_1C_1	(8;0;5)	(2;0;1)	(1;1;0)	(4;1;2)	$2m-3n$	$5m+n$	2	3	$\frac{\pi}{2}$
9	$\overline{A_1E}$	CD	(8;1;12)	(1;2;-1)	(3;0;2)	(-1;1;1)	$4m-n$	$m+2n$	$\sqrt{2}$	3	$\frac{3\pi}{4}$
10	$\overline{A_1E}$	BC	(–5;9;–13)	(0;1;–2)	(3;–1;1)	(4;1;0)	$m+n$	$5m-n$	$\sqrt{3}$	5	$\frac{5\pi}{6}$

Продолжение таблицы

Номер вари-анта	Задача 1		Задача 2				Задача 3				
	q	x	a	p	q	r	a	b	$\lvert m\rvert$	$\lvert n\rvert$	$(\widehat{m,n})$
11	$\overline{B_1E}$	AD	(8;9;4)	(1;0;1)	(0;–2;1)	(1;3;0)	$m+3n$	$3m-n$	3	5	$\frac{2\pi}{3}$
12	$\overline{B_1E}$	DC	(3;1;3)	(2;1;0)	(1;0;1)	(4;2;1)	$6m-n$	$m+n$	2	$\sqrt{2}$	$\frac{\pi}{4}$
13	$\overline{C_1E}$	AD	(11;–1;6)	(1;–1;2)	(3;2;1)	(–1;1;1)	$3m+4n$	$m-n$	3	2	$\frac{\pi}{2}$
14	$\overline{C_1E}$	AB	(0;–8;9)	(0;–2;1)	(3;1;–1)	(4;0;1)	$m-2n$	$2m+n$	2	$\sqrt{2}$	$\frac{3\pi}{4}$
15	$\overline{D_1E}$	BC	(15;–20;1)	(0;2;1)	(0;1;1)	(5;–3;2)	$m+4m$	$2m-n$	7	2	$\frac{\pi}{3}$
16	$\overline{AE}$	B_1C_1	(15;–20;0)	(1;3;0)	(2;–1;1)	(0;–1;2)	$m+2n$	$3m-2n$	5	2	$\frac{\pi}{3}$
17	$\overline{DE}$	BB_1	(0;–7;9)	(4;1;1)	(2;0;–3)	(–1;2;1)	$m-3n$	$2m+3n$	4	$\sqrt{2}$	$\frac{3\pi}{4}$
18	$\overline{BE}$	A_1D_1	(10;–1;5)	(5;1;0)	(2;–1;3)	(1;0;–1)	$5m+n$	$3m-4n$	$\sqrt{3}$	2	$\frac{\pi}{6}$
19	$\overline{DE}$	B_1C_1	(3;1;3)	(1;0;2)	(0;1;1)	(2;–1;4)	$3m-n$	$2m+4n$	2	$\sqrt{2}$	$\frac{\pi}{4}$
20	$\overline{BE}$	D_1C_1	(7;9;3)	(–1;2;1)	(2;0;3)	(1;1;–1)	$m-n$	$m+3n$	3	2	$\frac{2\pi}{3}$

Продолжение таблицы

Номер вари-анта	Задача 1		Задача 2				Задача 3				
	q	x	a	p	q	r	a	b	$\lvert m\rvert$	$\lvert n\rvert$	$(\widehat{m,n})$
21	$\overline{AE}$	CC_1	(–5;1;–13)	(1;–2;0)	(–1;1;3)	(1;0;4)	$m+4n$	$5m-n$	$2\sqrt{3}$	1	$\frac{5\pi}{6}$
22	$\overline{BE}$	DD_1	(8;1;12)	(1;1;0)	(0;1;–2)	(1;0;3)	$3m+2n$	$m-2n$	$\sqrt{2}$	3	$\frac{3\pi}{4}$
23	$\overline{CE}$	AA_1	(8;0;5)	(2;0;1)	(1;1;0)	(4;1;2)	$2m-3n$	$m+5n$	2	$\sqrt{3}$	$\frac{\pi}{6}$
24	$\overline{A_1E}$	CC_1	(4;–1;11)	(1;2;–1)	(3;0;2)	(–1;1;1)	$m-4n$	$2m+n$	$\sqrt{2}$	1	$\frac{3\pi}{4}$
25	$\overline{B_1E}$	DD_1	(5;–1;7)	(0;1;–2)	(3;–1;1)	(4;1;0)	$3m+n$	$m-5n$	3	$\sqrt{2}$	$\frac{\pi}{4}$
26	$\overline{CE}$	A_1D_1	(–1;7;–4)	(1;0;1)	(0;–2;1)	(1;3;0)	$m+5n$	$3m-n$	1	3	$\frac{\pi}{3}$
27	$\overline{D_1E}$	BB_1	(3;–3;4)	(2;1;0)	(1;0;1)	(4;2;1)	$m-7n$	$m+n$	2	1	$\frac{2\pi}{3}$
28	$\overline{C_1E}$	AA_1	(0;5;–5)	(1;–1;2)	(3;2;1)	(–1;1;1)	$3m+5n$	$2m-n$	4	$\sqrt{3}$	$\frac{5\pi}{6}$
29	$\overline{CE}$	AA_1	(–2;12;16)	(0;–2;1)	(3;1;–1)	(4;0;1)	$4m-3n$	$m+2n$	4	4	$\frac{\pi}{3}$
30	$\overline{D_1E}$	AB	(6;12;–3)	(0;2;1)	(1;1;–1)	(5;3;0)	$3m+4n$	$m-n$	4	5	$\frac{\pi}{3}$

Продолжение таблицы

Номер варианта	Задача 4					Задача 5		Задача 6				
	x	y	a	b	c	$\overline{AB}$	$\overline{AC}$	a	b	$\|m\|$	$\|n\|$	$(\widehat{m,n})$
1	$a+b$	c	(3;-6;-1)	(1;4;-5)	(3;-4;12)	(-3;2;2)	(-5;2;0)	$m-2n$	$3m+2n$	1	1	$\frac{\pi}{4}$
2	$3a-2b$	c	(-2;1;1)	(1;5;0)	(4;4;-2)	(0;-1;0)	(-2;-1;-1)	$2m+3n$	$m+4n$	2	3	$\frac{\pi}{3}$
3	$b+c$	a	(1;-4;8)	(4;4;-2)	(2;3;6)	(-6;-4;3)	(4;3;-1)	$6m-3n$	$3m+2n$	3	5	$\frac{\pi}{6}$
4	c	$a+b$	(-3;0;1)	(5;2;-4)	(2;3;4)	(3;3;3)	(- 3;4;0)	$3m-2n$	$2m+n$	2	3	$\frac{\pi}{6}$
5	$3a-c$	b	(1;-1;2)	(2;-2;1)	(4;-1;3)	(1;-3;-3)	(5;1;- 3)	$7m+n$	$n-3m$	3	1	$\frac{3\pi}{4}$
6	c	$a-b$	(0;-2;4)	(2;0;-1)	(-2;0;2)	(-3;5;6)	(2;5;1)	$3m-2n$	$m+5n$	4	$\frac{1}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$
7	$2a+3c$	a	(4;2;-2)	(1;0;-2)	(0;4;-2)	(2;1;-8)	(2;2;-2)	$4m-n$	$m+2n$	5	4	$\frac{\pi}{4}$
8	$a-3b$	c	(2;2;2)	(0;4;3)	(-3;0;-4)	(6;2;1)	(1;1;0)	$m+n$	$6m-n$	3	4	$\frac{\pi}{4}$
9	$2a+3b$	c	(3;2;-1)	(-1;0;2)	(0;4;-3)	(1;1;4)	(0;1;1)	$m+3n$	$7m-2n$	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{\pi}{3}$
10	$a-b+c$	b	(6;8;-2)	(1;2;3)	(-3;-7;9)	(-1;-1;1)	(-6;-1;-1)	$m+3n$	$3m-n$	3	5	$\frac{2\pi}{3}$

Продолжение таблицы

Номер варианта	Задача 4					Задача 5		Задача 6				
	x	y	a	b	c	$\overline{AB}$	$\overline{AC}$	a	b	$\|m\|$	$\|n\|$	$(\widehat{m,n})$
11	a	$b-c$	(6;-6;2)	(4;-3;-1)	(0;1;1)	(-2;-1;3)	(- 1;0;3)	$4m+n$	$m-n$	7	2	$\frac{\pi}{4}$
12	$b+2c$	a	(4;2;-4)	(3;2;1)	(1;1;4)	(1;-2;4)	(2;0;3)	$m-n$	$3m+3n$	2,5	2	$\frac{\pi}{2}$
13	$a+b$	$a-c$	(4;-4;0)	(1;-2;-3)	(1;4;4)	(-3;-4;-7)	(-4;-1;-5)	$3m-2n$	$10m+n$	4	1	$\frac{\pi}{6}$
14	$a-2b$	c	(-2;0;1)	(- 1;2;2)	(6;-2;3)	(-1;4;2)	(-2;3;1)	$3m-n$	$m+2n$	3	4	$\frac{\pi}{3}$
15	$b-2c$	a	(-1;4;8)	(4;-1;-3)	(2;0;-2)	(-4;0;3)	(-2;1;0)	$2m-n$	$3m+2n$	4	3	$\frac{3\pi}{4}$
16	$b-2c$	a	(3;-6;-1)	(1;4;-5)	(3;-4;12)	(1;1;1)	(1;-1;-1)	$3m-n$	$3m+n$	2	1	$\frac{\pi}{2}$
17	$a-2b$	c	(-2;1;1)	(1;5;0)	(4;4;-2)	(2;3;- 5)	(-1;0;1)	$m-n$	$8m-7n$	1	3	$\frac{\pi}{4}$
18	$a+b$	$a-c$	(1;-4;8)	(4;4;-2)	(2;3;6)	(3;0;1)	(1;1;3)	$2m-n$	$m+2n$	3	4	$\frac{\pi}{6}$
19	$b+2c$	a	(1;2;0)	(3;0;-2)	(0;-1;4)	(-2;-1;-1)	(5;0;1)	$m+5n$	$-m-3n$	1	1	$\frac{\pi}{3}$
20	a	$b-c$	(1;-1;2)	(2;-2;1)	(2;3;-2)	(- 3;4;2)	(2;0;-1)	$m+n$	$-m+4n$	3	1	$\frac{3\pi}{4}$

Продолжение таблицы

Номер варианта	Задача 4					Задача 5		Задача 6				
	x	y	a	b	c	$\overline{AB}$	$\overline{AC}$	a	b	$\|m\|$	$\|n\|$	$(\widehat{m,n})$
21	$a-b+c$	b	(0;-2;4)	(2;0;-1)	(-2;0;2)	(2;3;1)	(1;2;3)	$2m-3n$	$m+4n$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$
22	$2a+3b$	c	(4;2;-2)	(1;0;-2)	(0;4;-2)	(0;1;-2)	(1;1;3)	$4m+3n$	$4m-n$	1	4	$\frac{\pi}{2}$
23	$a-3b$	c	(2;2;2)	(0;4;3)	(-3;0;-4)	(4;3;2)	(0;1;2)	$m+n$	$-2m+n$	8	4	$\frac{\pi}{6}$
24	$2a+3c$	b	(3;2;-1)	(-1;0;2)	(0;4;-3)	(5;3;1)	(1;0;1)	$9m-n$	$m-3n$	$\frac{1}{7}$	2	$\frac{5\pi}{6}$
25	c	$a-b$	(6;8;-2)	(1;2;3)	(-3;-7;9)	(-3;2;1)	(-1;-2;-3)	$-m+n$	$-5m+4n$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{\pi}{4}$
26	$3a-b$	$b+c$	(0;-1;2)	(4;-3;1)	(-2;1;-2)	(4;1;0)	(3;2;1)	$4m+2n$	$-4m+2n$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$
27	$b+c$	a	(4;2;-4)	(3;2;1)	(1;1;4)	(2;0;-1)	(4;3;-5)	$m-5n$	$5m+5n$	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{\pi}{2}$
28	$3a-2b$	c	(4;-4;0)	(1;-2;-3)	(1;4;4)	(1;5;-1)	(1;1;- 5)	$7m-3n$	$3m-7n$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\pi}{6}$
29	$a+b$	c	(-2;0;1)	(-1;2;2)	(6;-2;3)	(0;2;-1)	(1;1;3)	$m+2n$	$2m+n$	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{5\pi}{6}$
30	$2a+c$	b	(1;2;-1)	(0;4;-3)	(2;-5;0)	(4;3;-1)	(-2;3;5)	$3m-4n$	$m+n$	1	1	$\frac{\pi}{2}$

Продолжение таблицы

Номер варианта	Задача 7			Задача 8				Задача 9	
	a	b	c	A_1	A_2	A_3	A_4	α	β
1	(3;2;1)	(2;3;4)	(3;1;-1)	(2;0;0)	(0;3;0)	(2;3;8)	(1;-1;-3)	$4x-2z-1=0$	$3x-3y+5z=0$
2	(1;–1;–3)	(3;2;1)	(2;3;4)	(2;3;1)	(4;1;–2)	(6;3;7)	(–5;–4;8)	$2x-4y+6z+2=0$	$5x+2y-6z-5=0$
3	(3;1;–1)	(–2;–1;0)	(5;2;–1)	(2;1;–1)	(3;0;1)	(2;–1;3)	(0;8;0)	$2x-4y-5z-3=0$	$3x-y+4z-7=0$
4	(4;3;1)	(6;7;4)	(2;0;–1)	(1;1;–2)	(4;2;–4)	(–3;1;1)	(2;6;–3)	$2x+5y+4=0$	$x+2y+4z-1=0$
5	(3;7;2)	(–2;0;–1)	(2;2;1)	(2;1;3)	(4;3;–1)	(5;1;0)	(3;0;7)	$4x-2y-3z+1=0$	$3x-4y+3z=0$
6	(6;3;4)	(–1;–2;–1)	(2;1;2)	(–1;0;3)	(2;4;2)	(1;3;8)	(–1;6;0)	$4x-y+2z+5=0$	$3x+2y+7z-1=0$
7	(2;3;2)	(4;7;5)	(2;0;–1)	(2;–1;1)	(5;5;4)	(3;2;–1)	(4;1;3)	$2x-6z+13=0$	$3y-2z+11=0$
8	(3;10;5)	(–2;–2;–3)	(2;4;3)	(2;3;8)	(0;3;0)	(0;0;6)	(2;0;0)	$2x-y+z+1=0$	$5x-y-5z+2=0$
9	(3;1;–1)	(1;0;–1)	(8;3;–2)	(0;–1;2)	(3;–3;3)	(2;0;4)	(3;–2;0)	$3x-4z+2=0$	$4y-3z-7=0$
10	(4;1;2)	(9;2;5)	(1;1;–1)	(1;2;–1)	(2;1;3)	(4;2;–4)	(3;4;–5)	$4x+2y-5z+3=0$	$x-3y-2z-2=0$
11	(3;4;2)	(1;1;0)	(8;11;6)	(5;5;4)	(3;2;–1)	(4;1;3)	(2;–1;1)	$x-2z+5=0$	$x+8y-5z-3=0$
12	(3;1;0)	(–5;–4;–5)	(4;2;4)	(0;–2;1)	(2;–1;–2)	(1;0;2)	(1;–5;2)	$3x-4y+z-1=0$	$x+2y-z+4=0$

Продолжение таблицы

Номер варианта	Задача 7			Задача 8				Задача 9	
	a	b	c	A_1	A_2	A_3	A_4	α	β
13	(1;–1;4)	(1;0;3)	(1;–3;8)	(1;–1;2)	(2;1;2)	(1;1;4)	(6;–3;8)	$2x+5y+z=0$	$x+4y+2z-1=0$
14	(4;1;1)	(–9;–4;–9)	(6;2;6)	(2;–4;–3)	(5;–6;0)	(–1;3;–1)	(–10;–8;7)	$7x-y+2z+3=0$	$7x+y+4z+2=0$
15	(–7;10;–5)	(0;–2;–1)	(–2;4;–1)	(–3;–5;6)	(2;1;–4)	(0;–3;–1)	(–5;2;–8)	$x+2y-z+4=0$	$y=4$
16	(2;1;2)	(1;5;3)	(3;4;5)	(2;0;3)	(3;2;4)	(1;0;3)	(4;2;6)	$3y+5z+4=0$	$2x-y+z-1=0$
17	(4;0;6)	(1;–3;1)	(-5;2;-3)	(-1;-1;2)	(1;-1;2)	(0;2;3)	(0;-3;3)	$2x+5y+8=0$	$x-2y+7z-2=0$
18	(2;5;8)	(-3;-6;-9)	(1;4;7)	(-7;-1;-1)	(-1;-1;4)	(0;0;5)	(-5;-1;2)	$x-2y-z+3=0$	$2x+2y+z-5=0$
19	(0;1;1)	(1;0;1)	(1;1;0)	(4;0;-2)	(-3-4;-7)	(4;1;-2)	(9;6;1)	$5x+y+3z-3=0$	$2y-4z+1=0$
20	(2;-1;-1)	(-1;-1;2)	(-1;2;-1)	(5;-2;-1)	(6;-1;-1)	(6;- 2;0)	(5;- 1;0)	$6x-2y+z+2=0$	$x-7z+5=0$
21	(1;-3;0)	(-2;5;7)	(-3;7;14)	(3;2;-3)	(4;5;3)	(4;4;0)	(4;3;-2)	$2x+3y-z+5=0$	$5y+z-1=0$
22	(-3;5;1)	(1;1;1)	(0;4;2)	(-1;-1;-1)	(0;1;2)	(1;2;4)	(0;1;3)	$7x-z+8=0$	$x+9y-z+2=0$
23	(1;5;2)	(0;3;-1)	(2;1;-1)	(1;1;3)	(2;5;6)	(6;4;5)	(3;2;6)	$5x-2y+3z-4=0$	$3y+4z-2=0$
24	(1;2;2)	(2;1;-2)	(2;-2;1)	(2;0;1)	(-2;-2;-2)	(4;1;3)	(5;4;6)	$6x+4y-z-3=0$	$x-y+8=0$

Продолжение таблицы

Номер варианта	Задача 7			Задача 8				Задача 9	
	a	b	c	A_1	A_2	A_3	A_4	α	β
25	(-3;0;1)	(1;3;1)	(4;3;0)	(3;-4;1)	(4;-8;4)	(6;-5;6)	(5;-7;2)	$9x+3y+z-1=0$	$x-2y+9=0$
26	(1;1;1)	(1;2;1)	(4;11;4)	(1;-2;-3)	(2;0;-6)	(2;1;-5)	(2;-1;-2)	$3x-2y+z-2=0$	$x-3y+8=0$
27	(-4;-3;9)	(2;3;-5)	(2;5;-8)	(1;0;5)	(3;-1;4)	(0;2;4)	(0;-1;6)	$3y-5z+4=0$	$2x-y+z+3=0$
28	(2;-5;8)	(1;-2;3)	(1;-3;4)	(3;-4;5)	(7;-2;10)	(1;4;7)	(8;-6;8)	$7x-4y-3=0$	$x+3y-5z+8=0$
29	(1;2;1)	(3;2;-1)	(0;2;1)	(0;1;-1)	(2;0;-1)	(-1;2;0)	(0;2;0)	$3x-7y+z+5=0$	$y-8z-9=0$
30	(1;-5;1)	(1;4;1)	(1;1;1)	(1;1;1)	(-3;6;-1)	(3;-6;11)	(2;2;-2)	$8x+4y-9=0$	$x-9z+7=0$

Продолжение таблицы

Номер варианта	Задача 10				Задача 11			Задача 12		
	A	B	C	S	M_0	γ_1	γ_2	A_1	B_1	C_1
1	(4;2;5)	(0;7;2)	(0;2;7)	(1;5;0)	(1;1;2)	$x-2y+3z+5=0$	$2x+y-3z+4=0$	(0;1;2)	(1;0;1)	(3;4;1)
2	(4;4;10)	(4;10;2)	(2;8;4)	(9;6;4)	(1;2;3)	$2x-3y+4z+7=0$	$x+4y-7z+5=0$	(1;0;2)	(−1;3;4)	(5;6;7)
3	(4;6;5)	(6;9;4)	(2;10;10)	(0;−1;1)	(2;4;3)	$3x+4y-7z+8=0$	$x+2y+3z-7=0$	(3;2;−1)	(4;5;2)	(1;2;3)
4	(3;5;4)	(8;7;4)	(5;10;4)	(4;7;8)	(2;1;−1)	$x-2y+4z+8=0$	$x-3y-4z+5=0$	(−3;0;1)	(5;6;2)	(4;1;3)
5	(10;6;6)	(−2;8;2)	(6;8;9)	(7;10;3)	(3;2;1)	$3x-y+z-7=0$	$2x-3y+2z-7=0$	(4;5;1)	(1;3;4)	(5;2;1)
6	(1;8;2)	(5;2;6)	(5;7;4)	(4;10;9)	(−2;0;1)	$2x-7y+z-10=0$	$x+3z+8=0$	(−1;2;−3)	(3;4;5)	(4;0;5)
7	(6;6;5)	(4;9;5)	(4;6;11)	(6;9;3)	(1;0;−1)	$x-2y-z+1=0$	$2x+y-z-5=0$	(7;1;8)	(9;10;1)	(2;0;3)
8	(7;2;2)	(5;7;7)	(5;3;1)	(2;3;7)	(5;1;7)	$4x-3y+z-1=0$	$x-y+2z-7=0$	(3;2;0)	(4;5;1)	(−1;2;−3)
9	(8;6;4)	(10;5;5)	(5;6;8)	(8;10;7)	(2;4;8)	$2x+7y+5z+1=0$	$3x+y-7z+5=0$	(−6;7;0)	(0;1;4)	(2;3;1)
10	(7;7;3)	(6;5;8)	(3;5;8)	(8;4;1)	(1;1;0)	$3x-2y+5z+8=0$	$x-2y+4z+5=0$	(2;2;1)	(4;3;1)	(4;5;7)
11	(3;−2;1)	(1;0;2)	(1;2;0)	(1;−2;4)	(2;7;3)	$4x-3y-z-7=0$	$x-3y-3z=0$	(8;1;9)	(2;2;3)	(4;5;3)
12	(1;−1;0)	(4;3;5)	(7;2;1)	(2;3;4)	(3;4;1)	$2x-y+3z+4=0$	$x+2y+z-7=0$	(5;7;8)	(2;6;1)	(3;4;0)
13	(1;2;3)	(3;2;1)	(4;3;1)	(2;1;7)	(2;1;0)	$x+y+z-1=0$	$2x-y+2z+5=0$	(0;4;5)	(7;1;8)	(1;−2;3)
14	(1;2;2)	(2;3;1)	(3;2;1)	(4;5;7)	(1;5;7)	$x-y-z+1=0$	$x-3y+4z-7=0$	(4;0;1)	(2;3;5)	(6;7;8)
15	(2;3;1)	(3;4;1)	(4;2;0)	(5;1;2)	(2;3;1)	$2x-3y+4z+5=0$	$2x+3y+4z-11=0$	(6;1;3)	(3;1;0)	(2;1;1)

Продолжение таблицы

Номер варианта	Задача 10				Задача 11			Задача 12		
	A	B	C	S	M_0	γ_1	γ_2	A_1	B_1	C_1
16	(2;−1;−2)	(3;1;0)	(4;0;1)	(−3;2;−1)	(1;−1;2)	$2x+y-3z+2=0$	$x-3y+6z-1=0$	(1;−2;4)	(0;2;1)	(2;1;3)
17	(3;0;−1)	(2;5;1)	(5;1;−2)	(0;4;1)	(−1;0;−2)	$3x-2y+z-1=0$	$4x+y-2z-3=0$	(−3;2;1)	(1;0;2)	(3;−2;−1)
18	(−1;3;2)	(1;3;3)	(−2;1;4)	(4;−1;2)	(2;1;−3)	$x+3y-z-3=0$	$y+5z+1=0$	(2;3;0)	(−1;2;3)	(5;3;1)
19	(−2;1;5)	(2;3;6)	(−1;2;8)	(−3;5;−2)	(0;2;3)	$x-4z+3=0$	$2x-y-3z-1=0$	(−1;2;5)	(2;0;3)	(1;3;−4)
20	(4;−2;1)	(5;1;3)	(6;−1;1)	(2;−3;−1)	(3;−4;0)	$2x+3y+9=0$	$4x-y-z+2=0$	(4;0;−2)	(3;−1;0)	(2;5;3)
21	(1;4;−3)	(0;3;−2)	(3;5;1)	(−1;2;5)	(−3;1;−1)	$y-2z+2=0$	$x-5y+z-2=0$	(−5;3;2)	(2;4;3)	(0;−1;−2)
22	(6;0;1)	(9;3;1)	(7;2;3)	(5;1;7)	(−2;1;3)	$x+2y-5=0$	$3x+5y-z-1=0$	(0;3;−1)	(2;5;−3)	(4;1;0)
23	(−3;−4;5)	(−1;−5;7)	(−2;−1;3)	(1;2;1)	(4;−1;2)	$x+2y-5z=0$	$2x+z-3=0$	(−2;−2;3)	(0;1;−3)	(2;3;5)
24	(5;−1;2)	(6;1;1)	(2;3;0)	(3;−7;2)	(−5;−2;0)	$4x+2y-7=0$	$x-y+3z-1=0$	(3;−1;2)	(2;3;−1)	(5;1;1)
25	(1;−4;−3)	(4;−5;−1)	(3;−6;−4)	(2;1;5)	(−3;0;−2)	$2x-y-z+3=0$	$x+5z+2=0$	(−1;5;2)	(2;0;−1)	(3;2;0)
26	(0;3;5)	(2;6;8)	(−1;4;3)	(1;9;3)	(3;0;2)	$7x-y+z-2=0$	$2x+z-1=0$	(4;2;3)	(−1;1;0)	(2;−3;1)
27	(−4;5;0)	(−7;7;1)	(−8;6;1)	(9;7;−1)	(2;−1;0)	$x-7y+z-5=0$	$x+3y-z+5=0$	(3;1;−2)	(2;−1;0)	(4;−3;1)
28	(2;4;7)	(−1;6;9)	(0;5;7)	(2;1;3)	(1;−1;−1)	$2x+y-7z+3=0$	$y-4z-1=0$	(5;−1;0)	(3;2;−2)	(2;5;−1)
29	(8;−3;2)	(9;−3;4)	(10;−1;6)	(4;1;3)	(−1;2;1)	$5x+y-z-2=0$	$x-2y+z+1=0$	(−4;3;1)	(−1;−2;0)	(1;−1;2)
30	(−5;4;3)	(−7;6;4)	(−5;7;5)	(9;−2;3)	(1;−1;−2)	$x-3y+2z-3=0$	$2x+y-z+2=0$	(−5;2;−1)	(1;1;3)	(0;3;1)

Продолжение таблицы

Номер варианта	Задача 13	Задача 14		Задача 15	
	l	M_0	α	l	β
1	$\begin{cases} 2x-3y+1=0 \\ y+2z-1=0 \end{cases}$	(3;-1;1)	$2x-y+3z+4=0$	$\frac{x-3}{2}=\frac{y+5}{0}=\frac{z-1}{-6}$	$3y-2z+30=0$
2	$\begin{cases} 3x-5y+41=0 \\ 7x-5z+14=0 \end{cases}$	(4;5;10)	$x+y-z+7=0$	$\frac{x+5}{5}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{-5}$	$2x-y+z+9=0$
3	$\begin{cases} y-4z+8=0 \\ 2x-3z-2=0 \end{cases}$	(6;-2;-2)	$2x+3y+z+10=0$	$\frac{x+3}{3}=\frac{y+5}{0}=\frac{z-1}{-4}$	$4y-3z+8=0$
4	$\begin{cases} 2x-5y+5=0 \\ 3y+2z-9=0 \end{cases}$	(7;4;8)	$3x+y+4z-5=0$	$\frac{x}{3}=\frac{y+7}{-4}=\frac{z+1}{1}$	$x+2y-z+4=0$
5	$\begin{cases} 2x-y-3=0 \\ y+z-5=0 \end{cases}$	(9;0;18)	$5x-3y-z+8=0$	$\frac{x-3}{2}=\frac{y}{5}=\frac{z+4}{1}$	$x+4y+2z+6=0$
6	$\begin{cases} x-2y-9=0 \\ 7x-4z-21=0 \end{cases}$	(4;1;11)	$x-2y+3z-7=0$	$\frac{x+4}{2}=\frac{y-7}{2}=\frac{z}{1}$	$2x+2y-z+13=0$

Продолжение таблицы

Номер варианта	Задача 13	Задача 14		Задача 15	
	l	M_0	α	l	β
7	$\begin{cases} 5x-2y+20=0 \\ 6y-5z+5=0 \end{cases}$	(4;3;6)	$x+3y+4z-11=0$	$\frac{x-1}{4}=\frac{y+1}{0}=\frac{z}{-2}$	$3x-3y-5z+1=0$
8	$\begin{cases} 2x+y-3=0 \\ 3y-2z+11=0 \end{cases}$	(13;5;3)	$4x+2y-3z+5=0$	$\frac{x-5}{1}=\frac{y-7}{-2}=\frac{z+1}{2}$	$x+2y+2z=0$
9	$\begin{cases} x-3z+1=0 \\ y-7z+15=0 \end{cases}$	(7;0;7)	$7x-2y+4z-8=0$	$\frac{x+1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z+5}{-2}$	$12x-3y-4z+11=0$
10	$\begin{cases} x-5z+8=0 \\ y-4z+6=0 \end{cases}$	(-4;9;-9)	$2x+3y-5z+12=0$	$\frac{x}{3}=\frac{y-1}{4}=\frac{z+2}{12}$	$2x-y+z-11=0$
11	$\begin{cases} 7x-2z-21=0 \\ 7y-2z=0 \end{cases}$	(1;2;-7)	$x-2y+3z+10=0$	$\frac{x-1}{12}=\frac{y+3}{4}=\frac{z}{3}$	$4x-3y+12z-7=0$
12	$\begin{cases} 2x+z+9=0 \\ 3x-2y+13=0 \end{cases}$	(-3;-9;15)	$2x+5y-6z+11=0$	$\frac{x+3}{3}=\frac{y}{4}=\frac{z-8}{5}$	$4x+12y-3z+1=0$

Продолжение таблицы

Номер варианта	Задача 13	Задача 14		Задача 15	
	l	M_0	α	l	β
13	$\begin{cases} 4x - 3y - 11 = 0 \\ 2x - 3z - 13 = 0 \end{cases}$	(-8;8;-5)	$x - 3y + 7z + 8 = 0$	$\frac{x+5}{-4} = \frac{y-7}{12} = \frac{z-2}{3}$	$3x + 4y - 5z - 2 = 0$
14	$\begin{cases} x + 2z - 3 = 0 \\ 3x + 4y - 19 = 0 \end{cases}$	(-6;9;-16)	$2x - 4y + 9z - 10 = 0$	$\frac{x-4}{5} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$	$5x - 3y + 4z - 1 = 0$
15	$\begin{cases} 4x - 3y - 11 = 0 \\ 3y - 7z - 14 = 0 \end{cases}$	(-1;-3;11)	$3x + 5y - z - 6 = 0$	$\frac{x-2}{12} = \frac{y-1}{4} = \frac{z+1}{3}$	$2x - 2y + z - 9 = 0$
16	$\begin{cases} x - 2z + 3 = 0 \\ 2y + z - 6 = 0 \end{cases}$	(1;3;-2)	$3x - y + 5z - 25 = 0$	$\frac{x+2}{-3} = \frac{y}{5} = \frac{z+3}{2}$	$2x + 3y - z + 1 = 0$
17	$\begin{cases} 3x - y - 9 = 0 \\ x + 2z + 1 = 0 \end{cases}$	(-3;2;1)	$2x - 3y - z - 15 = 0$	$\frac{x+1}{5} = \frac{y-7}{-4} = \frac{z-2}{3}$	$x - 2y + 2z + 7 = 0$
18	$\begin{cases} y - 3z + 2 = 0 \\ x + 2y + 2 = 0 \end{cases}$	(-2;-1;5)	$2x + 2y + 3z + 8 = 0$	$\frac{x-6}{4} = \frac{y+8}{2} = \frac{z-1}{-7}$	$3x - 5y + 8 = 0$

Продолжение таблицы

Номер варианта	Задача 13	Задача 14		Задача 15	
	l	M_0	α	l	β
19	$\begin{cases} 2x + y - z + 1 = 0 \\ x - y + 2z - 4 = 0 \end{cases}$	(4;-3;-1)	$x - 4y - 2z + 3 = 0$	$\frac{x}{3} = \frac{y-5}{-12} = \frac{z}{4}$	$x + 6y + z + 3 = 0$
20	$\begin{cases} 4x - 2y + z + 1 = 0 \\ 3x + y - z + 2 = 0 \end{cases}$	(5;1;2)	$3x - 2y + 4z + 37 = 0$	$\frac{x-7}{0} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-3}{2}$	$3x - 4z + 9 = 0$
21	$\begin{cases} 2x - 3z + 2 = 0 \\ y + 5z - 1 = 0 \end{cases}$	(0;-4;3)	$4x + 3y - z - 37 = 0$	$\frac{x-2}{-5} = \frac{y}{2} = \frac{z+4}{0}$	$x - 2y - 2z + 4 = 0$
22	$\begin{cases} 5x + y + 2z + 4 = 0 \\ 6x - y + 4z + 2 = 0 \end{cases}$	(3;-2;4)	$3x - 4y + 2z + 33 = 0$	$\frac{x-6}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z+1}{-1}$	$8x + 4y + z - 3 = 0$
23	$\begin{cases} 5y - 4z + 4 = 0 \\ x - y + 2z + 2 = 0 \end{cases}$	(2;0;-3)	$5x + 2y + 3z - 39 = 0$	$\frac{x+9}{-1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z}{8}$	$x + 3y - 4z + 7 = 0$
24	$\begin{cases} 3x + 2z - 3 = 0 \\ x + y + 1 = 0 \end{cases}$	(-5;-3;2)	$x - 5y - 4z + 40 = 0$	$\frac{x+3}{7} = \frac{y+8}{0} = \frac{z-6}{4}$	$6y + 8z + 5 = 0$

Окончание таблицы

Номер варианта	Задача 13	Задача 14		Задача 15	
	l	M_0	α	l	β
25	$\begin{cases} 2y-5z+4=0 \\ x-3y+4z-5=0 \end{cases}$	(-7;2;0)	$6x+y-2z-1=0$	$\frac{x-1}{3}=\frac{y}{-2}=\frac{z+7}{9}$	$4x-3z+6=0$
26	$\begin{cases} 3x+4z+4=0 \\ 2x-y+1=0 \end{cases}$	(6;4;-2)	$7x+4y-3z+10=0$	$\frac{x-5}{-2}=\frac{y-3}{-3}=\frac{z}{4}$	$6x-3y+7=0$
27	$\begin{cases} x-2y+2=0 \\ 5y+3z-3=0 \end{cases}$	(8;3;1)	$2x+6y-4z-2=0$	$\frac{x+4}{6}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+2}{3}$	$2x+5y-z+11=0$
28	$\begin{cases} x+2z-4=0 \\ y+3z-1=0 \end{cases}$	(1;9;-7)	$8x-6y+2z+8=0$	$\frac{x-7}{4}=\frac{y+6}{-1}=\frac{z-9}{0}$	$3x-2y+6z-1=0$
29	$\begin{cases} 3x-2y+4=0 \\ x+z-3=0 \end{cases}$	(2;-6;8)	$2x-y+9z+4=0$	$\frac{x+6}{-2}=\frac{y+1}{0}=\frac{z}{1}$	$2x-6y-3z+5=0$
30	$\begin{cases} x+4y+2z-1=0 \\ 2x+3y+2z-3=0 \end{cases}$	(-7;-8;4)	$9x+7y-6z-23=0$	$\frac{x+8}{3}=\frac{y-5}{2}=\frac{z+7}{-1}$	$6x-2y+3z-4=0$

ОТВЕТЫ

Глава 1

1.3. $\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}$, $2\boldsymbol{q}$, $-\boldsymbol{p}$, $-\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}$, $2\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p}$

1.4. $\boldsymbol{m}_A=\boldsymbol{a}+\dfrac{\boldsymbol{b}}{2}$, $\boldsymbol{m}_B=\dfrac{\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}}{2}$, $\boldsymbol{m}_C=-\boldsymbol{b}-\dfrac{\boldsymbol{a}}{2}$

1.5. $\dfrac{\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|}-\dfrac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$

1.6. $-\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n}-\boldsymbol{p}$; $-\boldsymbol{n}-\boldsymbol{m}+\boldsymbol{p}$

1.7. $\dfrac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}}{3}$

1.8. $-2\boldsymbol{a}$, $2\boldsymbol{c}-2\boldsymbol{a}$, $2\boldsymbol{c}-4\boldsymbol{a}$, $3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{c}$

1.9. $\left(\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}+\dfrac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|}\right)$, $\left(\dfrac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}-\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}\right)$, $\left(-\dfrac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}-\dfrac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|}\right)$

1.13. $-\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-5\boldsymbol{k}$

1.14. $|\overline{AB}|>|\overline{CD}|$, $\frac{1}{\sqrt{14}}(1;-2;3)$

1.15. $2\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$

1.16. $-8\boldsymbol{i}+14\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k}$

1.17. $(2;-2;2\sqrt{2})$

1.18. $\pm(5;5;5)$

1.19. $\alpha=-6$, $\beta=-2$

1.20. $\boldsymbol{b}=(-6;10;-8)$

1.21. $(-4\sqrt{2};4;-4)$, $(-4\sqrt{2};4;4)$

1.22. $\dfrac{1}{5}(42;60;6)$

1.23. $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}-2\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{b}=\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{d}$,
$\boldsymbol{d}=-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\dfrac{1}{2}\boldsymbol{c}$

1.24. $\frac{a}{2}+\frac{b}{2}+c$

1.25. $3\sqrt{7}$, $\sqrt{61}$

1.26. $-\frac{1}{\sqrt{290}}$

1.27. -6

1.28. $\sqrt{3}$

1.29. $\frac{11}{5\sqrt{30}}$

1.30. $-\frac{10}{\sqrt{6}}$

1.31. $(2; 6; -4)$

1.32. $\frac{66}{\sqrt{57}}$, $\frac{36}{\sqrt{57}\cdot\sqrt{26}}$

1.34. $-\sqrt{3}$

1.35. $\sqrt{73}$, $2\sqrt{3}$

1.36. $\frac{7}{26}$

1.37. -4

1.38. $\frac{9}{\sqrt{10}}$, $\frac{17}{\sqrt{26}}$

1.39. $-\frac{1}{\sqrt{33}}$

1.40. $-\frac{4}{3}$

1.41. $\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}; 2\right)$

1.42. $-\frac{53}{\sqrt{94}}$

1.43. $2\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$

1.44. 20

1.45. $\sqrt{38}$, $\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$

1.46. $\frac{5\sqrt{6}}{2}$, $\frac{5\sqrt{21}}{7}$

1.47. $(-3; 6; 0)$

1.48. $4i-8j-12k$

1.49. $2\boldsymbol{i}+11\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}$

1.51. $\pm\frac{1}{\sqrt{11}}(-3; -1; 1)$

1.52. 84

1.53. 22

1.54. $\frac{1}{7}(6; 3; -2)$

1.55. $(-28; 4; -8)$

1.56. $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{3}$

1.57. 21

1.58. $\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$

1.59. $7(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})+2(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$

1.60. $|mnp|$

1.61. $\frac{7}{2}$, $\frac{7}{\sqrt{5}}$

1.63. $\frac{5}{3}$

1.64. $(10; -8; -2)$

1.65. $\frac{3}{2}$, $\frac{9}{\sqrt{35}}$

1.66. $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$

1.67. 0

1.68. $4|abc|$

1.69. $\frac{9}{\sqrt{91}}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

1.70. $(0; 0; 8)$

1.71. $\frac{3\sqrt{21}}{7}$

1.72. 3

1.73. 2

1.74. Левая

Глава 2

2.1. $2x-5y+3z+5=0$

2.2. $7x-y-3z+10=0$

2.3. $3x-5y-6z-19=0$

2.4. $2x-y+5z-23=0$

2.5. $5x-4y=0$

2.6. $\frac{1}{\sqrt{14}}$

2.7. 3

2.8. $\dfrac{7}{\sqrt{56}}$

2.10. $4x-5y-3z-7=0$

2.11. $11x+3y+z-32=0$

2.12. $2x+11y+3z-20=0$

2.13. $7x+2y-8z+16=0$

2.14. $\sqrt{\dfrac{7}{15}}$

2.15. $\dfrac{5}{2\sqrt{6}}$

2.16. $\dfrac{8}{7}$

2.17. $\dfrac{x-2}{-4}=\dfrac{y-3}{0}=\dfrac{z+4}{7}$; $\begin{cases} y-3=0 \\ 7x+4z+2=0 \end{cases}$

2.18. $\dfrac{x-6}{2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z+3}{-1}$; $\begin{cases} 3x-2y-14=0 \\ x+2z=0 \end{cases}$

2.19. $\dfrac{x-2}{\sqrt{2}}=\dfrac{y+3}{-1}=\dfrac{z}{1}$; $\dfrac{x-2}{\sqrt{2}}=\dfrac{y+3}{-1}=\dfrac{z}{-1}$

2.20. $\dfrac{x-5}{-3}=\dfrac{y-7}{-2}=\dfrac{z+3}{3}$; $\begin{cases} x=-3t+5 \\ y=-2t+7 \\ z=3t-3 \end{cases}$;

$\begin{cases} 2x-3y+11=0 \\ x+z-2=0 \end{cases}$

2.21. $\dfrac{x+2}{-4}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z+3}{-7}$

2.22. $\dfrac{x-4}{-8}=\dfrac{y+5}{3}=\dfrac{z}{0}$

2.23. $\dfrac{\sqrt{3}}{9}$

2.24. Пересекаются.

2.25. $\begin{cases} x=2t+4 \\ y=5t-3 \\ z=-3t+8 \end{cases}$

2.26. $\dfrac{x+4}{3}=\dfrac{y}{5}=\dfrac{z+2}{-9}$

2.27. $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z-9}{-5}$; $\begin{cases} x=t+2 \\ y=-2t-1 \\ z=-5t+9 \end{cases}$

2.29. $\dfrac{4}{3\sqrt{10}}$

2.31. $-\dfrac{2}{\sqrt{14}}$

2.32. $4x-2y-5z-5=0$

2.33. $3x+5y+z-12=0$

2.34. $(0;2;2)$

2.35. $2x-y-z+1=0$

2.36. $3x+4y+5=0$

2.37. $5x-2y+11z-7=0$

2.38. $\sqrt{34}$

2.39. $\begin{cases} 6x-2y+z-19=0 \\ 4x+13y+2z-5=0 \end{cases}$

2.40. $4x+5y-3z-1=0$

2.41. $(6;7;-1)$

2.42. $4x-11y+21z+4=0$

2.43. $3x+2y-2z-1=0$

2.44. $\dfrac{5}{\sqrt{73}\cdot\sqrt{78}}$

2.45. $\dfrac{4}{\sqrt{38}}$

2.46. $\dfrac{x}{12}=\dfrac{y}{-17}=\dfrac{z}{27}$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Агаева Э.И., Сперанская Р.Ф.* Векторная алгебра и аналитическая геометрия. – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1989. – 46 с.

2. *Ильин В.А., Позняк Э.Г.* Аналитическая геометрия. – М.: Наука, 1988. – 232 с.

3. *Канатников А.Н., Крищенко А.П.* Аналитическая геометрия. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1998. – 392 с.

4. *Сборник* задач по математике для втузов. Под ред. А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича. – Т.1 – М.: Наука, 1986. – 462 с.

5. *Клетеник Д.В.* Сборник задач по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1986.– 240 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ